CORRECTION DE L'ÉPREUVE PHYSIQUE II 2006

PARTIE A: CÂBLE COAXIAL EN RÉGIME CONTINU

I. Loi d'Ohm locale

I. 1. Les électrons de conduction se déplacent dans une structure cristalline composée d'atomes de métal partiellement ionisé. Il y a donc des interactions entre chacun des électrons et son milieu ambiant (les autres électrons et le réseau cristallin). On peut imaginer simplement l'ensemble des électrons de conduction se comportant comme un "gaz parfait" d'électrons évoluant dans un milieu globalement chargé positivement de la charge exactement opposée à celle du gaz d'électrons (le métal soumis à un courant électrique reste neutre dans sa globalité). Les électrons sont donc "attirés" par le réseau cristallin. Il s'ensuit qu'ils sont freinés dans leur mouvement. On peut aussi parler de "collisions" avec le réseau cristallin ce qui revient au même.

I. 2. On appelle $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ la résultante totale des forces auxquelles est soumis l'électron, $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{él}}}$ la force de Coulomb lié au champ électrique, $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{p}}}$ le poids de l'électron et $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{f}}}$ l'ensemble des forces de freinage agissant sur l'électron. Il vient donc :

$$\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{él}}} = (-e)\overrightarrow{\mathbf{E}}; \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{f}}} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{\mathbf{v}}; \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{p}}} = m\overrightarrow{\mathbf{g}}$$

Petite application numérique pour fixer les ordres de grandeur : Si on prend pour valeur numérique de la gravitation $||\overrightarrow{\mathbf{g}}|| \sim 10$ms^{-2} alors le module du poids de l'électron est $mg \sim 10\times10^{-30} \sim 10^{-29}$ N. La charge de l'électron étant de $\sim 10^{-19}$ C, il faudrait un champ électrique de l'ordre de $\sim 10^{+10}$ V/m pour que le poids et la force de Coulomb soit d'intensité comparable. Un tel champ électrique est absolument phénoménal. L'énoncé annonce un champ de l'ordre de 1 V/m. On peut donc négliger le poids de l'électron dans notre problème puisqu'on s'intéresse au mouvement des électrons le long du câble.

Appliquons le Principe Fondamental de la Mécanique (P.F.D) à un électron. Il vient :

$$m\dot{\overrightarrow{\mathbf{v}}} = \overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{él}}} + \overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{f}}} = (-e)\overrightarrow{\mathbf{E}} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{\mathbf{v}}$$

Dans l'hypothèse de ces seules forces et de la seule mise en mouvement des électrons par la seule force électrique, tout le mouvement de l'électron se fait selon l'axe du câble. On pose donc :

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = v\overrightarrow{\mathbf{e}_x} \text{ et } \overrightarrow{\mathbf{E}} = E\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$$

où v est la vitesse algébrique et E le champ électrique algébrique, selon l'axe des x

On peut donc projeter la relation du P.F.D sur l'axe $\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$. Il vient alors :

$$\boxed{m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v = -eE}$$

I. 3. Il suffit de résoudre cette équation différentielle linéaire, du premier ordre et à coefficients constants. La solution générale d'une telle équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (SGEHA) et d'**UNE** solution particulière (SP). On opère en trois temps. Dans un premier temps on cherche la SGEHA, puis une SP et dans un troisième temps on fixe les constantes d'intégration (une pour une équation du premier ordre, 2 pour le second ordre) Une façon rapide de trouver une SP est de chercher des cas particuliers, ou, si cela est trop compliqué on utilise la méthode de la variation de la constante (à éviter la plupart du temps en ce qui concerne les équations de la Physique).

1. Cherchons la SGEHA. L'équation homogène est l'équation à second membre nul. Soit ici :
$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v = 0$$
On sait que la solution générale V_H est de la forme :
$$V_H = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
où A est une constante fixée par les conditions initiales.
2. Une solution particulière évidente s'obtient en considérant le cas où $\dot{v}$ est nul (cas particulier où la vitesse est constante). La solution particulière V_P de l'équation de la question I.2 est alors :
$$V_P = -\frac{e\tau}{m}E$$
3. On va fixer la constante A en utilisant la condition initiale $v(t=0)=0$ (vitesse nulle à l'origine des temps). cherche donc la vitesse sous la forme :
$$v(t) = V_H + V_P = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{e\tau}{m}E$$
A l'instant $t=0$, on a donc :
$$v(0) = A - \frac{e\tau}{m}E = 0 \text{ soit } A = \frac{e\tau}{m}E$$

La solution au problème est donc :
$$v(t) = -\frac{e\tau}{m}E\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$
Puisque l'énoncé demande la solution vectorielle :
$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}(t) = -\frac{e\tau}{m}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\vec{\mathbf{E}}}$$

I. 4. Lorsque $t \to +\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. La vitesse tend donc vers une vitesse limite $\overrightarrow{\mathbf{v}_{lim}}$telle que :
$$\overrightarrow{\mathbf{v}_{lim}} = -\frac{e\tau}{m}\vec{\mathbf{E}}$$
On a donc :
$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\overrightarrow{\mathbf{v}_{lim}}$$

I. 5. Application numérique

I.5. 1. Attention à l'énoncé ici. Le v_{lim} de l'énoncé n'est pas correctement défini. Sagit-il du module (forcément positif) ou de la grandeur algébrique (négative ici puisque le champ électrique est orienté positivement selon $\overrightarrow{\mathrm{e}_x}$)? Puisque l'énoncé ne le spécifie pas c'est à l'étudiant de le faire. Disons que l'on calcule la projection. Alors :

$$\boxed{v_{lim} = -\frac{1,6.10^{-19} \times 2,5.10^{-14}}{9.1^{-31}} \times 0.5 \sim -0,22.10^{-2} \text{ m/ s}}$$

I.5. 2. La encore, l'énoncé ne spécifie pas si l'on parle du module de la vitesse ou de sa projection sur l'axe des x. Conservons la même notation que précédemment. D'après la question I.4 et les données numériques :

$$v(5\tau) = v_{lim}\left[1 - \exp\left(-5\right)\right] \sim 0,99 v_{lim}$$

Au bout de quelque τ, on est à plus de 99% de la vitesse limite. Le régime permanent s'installe donc rapidement en regard du temps τ.

I. 6. La mobilité μ de l'énoncé est donnée par la question I.4 :

$$\mu = -\frac{e\tau}{m}$$

I.6. 1. Par définition du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, on a l'égalité :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho\overrightarrow{\mathbf{v}}$$ où ρ est la densité volumique **de charges**

On a donc :

$$\rho = (-e)N^*$$

Finalement :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = (-e)N^*\overrightarrow{\mathbf{v}_{lim}} = (-e)N^*(-\frac{e\tau}{m})\overrightarrow{\mathbf{E}} = \frac{e^2\tau N^*}{m}\overrightarrow{\mathbf{E}}$$

La loi d'Ohm (relation linéaire entre $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{E}}$) est donc satisfaite et ce petit modèle de transport électronique nous donne la conductivité du matériau :

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2\tau N^*}{m}}$$

Remarque : On voit que la conductivité est proportionnelle à la densité de porteurs de charges. Cette propriété essentielle dans le transport électronique est très souvent utilisée pour caractériser les matériaux conducteurs ou semi-conducteurs à partir d'une mesure électrique relativement simple à mettre en œuvre

I.6. 2. Application numérique :

$$\sigma = \frac{1,6^2.10^{-38} \times 2,5.10^{-14} \times 6.10^{28}}{9,1.10^{-31}} \sim 4,22 \text{ S. m}$$

II. Résistance d'un conducteur cylindrique d'axe Ox

II. 1. Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ est le vecteur densité de courant électrique. Il est relié à la grandeur physique mesurable, l'intensité électrique, par une relation intégrale de flux sur une surface Sf :

$$I = \iint_{Sf} \overrightarrow{\mathbf{j}}\,\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{S}}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{S}}$ est le vecteur différentiel de surface, local, normal à la surface et orienté dans le sens ou l'on veut compter positivement le courant.

II. 2. Le problème est monodimensionnel. La seule variable d'espace dont dépendent les quantités physiques est la variable x. Soit :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}} = \sigma\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\sigma\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = -\sigma\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$$

II. 3. Nous allons intégrer cette relation sur la section S du câblz afin de relier l'intensité I au potentiel V. On oriente la surface d'intégration selon $\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$. Si bien que :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{S}} = \mathrm{d}S\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$$

Alors :

$$\iint_{Sf} \overrightarrow{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}S\overrightarrow{\mathbf{e}_x} = -\iint_{Sf} \sigma\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\overrightarrow{\mathbf{e}}.\overrightarrow{\mathbf{e}_x}\mathrm{d}S$$

Puisque $\overrightarrow{\mathbf{j}} = J\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$ est constant sur la section S, il vient :

$$I = S.J$$

On a donc

$$I = -S\sigma\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)$$

Puisque I est une quantité constante le long du câble (loi des nœuds), on peut intégrer cette dernière relation entre $x = 0$ et un x quelconque. Il vient donc :

$$V(x) - V_0 = -\frac{I}{S\sigma}x$$

II. 4. La résistance est le rapport entre la différence de potentiel et l'intensité. On peut donc écrire :

$$V_0 - V(x) = R(x).I = \frac{I}{S\sigma}x$$

D'où

$$\boxed{R(x) = \frac{x}{S\sigma}}$$

II. 5. D'après la relation précédente, la résistance par unité de longueur est :

$$\lambda = \frac{1}{S\sigma}$$

Il nous suffit donc d'estimer la valeur de la section S_1 pour le conducteur A_1 et celle de S_2 pour le conducteur A_2.
II.5. 1. Le conducteur A_1 est un cylindre circulaire. La section S_1 est donc :

$$S_1 = \pi.r_1^2$$

d'où :

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{1}{\pi.r_1^2\sigma}}$$

II.5. 2. La surface S_2 est une couronne circulaire obtenue par la soustraction de deux disques de rayons r_3 et r_2. On a donc :

$$S_2 = \pi(r_3^2 - r_2^2)$$

Alors :

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\pi.(r_3^2 - r_2^2)\sigma}}$$

III. Résistance de la gaine d'isolant imparfait comprise entre deux armatures

III. 1. L'énoncé spécifie bien, que dans ce paragraphe, on ne s'occupe que de l'aspect radial. On pose donc :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}(r) = j(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$$

Le champ électrique est toujours lié au potentiel :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$$

La loi d'Ohm locale s'écrit donc :

$$\boxed{j(r) = -\sigma_g\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)}$$

*R*EAMARQUE : Là encore l'énoncé n'est pas très judicieux dans ces notations. Le but avoué est d'intégrer cette relation pour trouver une relation entre la différence de potentiel radiale et le courant de fuite. Or la relation intégrale existant entre le courant I et le vecteur densité de courant est une relation intégrale **vectorielle**. La relation demandée par l'énoncé serait mieux venue sous forme vectorielle et non sous forme scalaire.. On va donc utiliser :

$$j(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r} = -\sigma_g\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$$

III. 2. On utilise donc la surface cylindrique proposée. L'élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{S}} = \mathrm{d}S\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$ est donc radial. En intégrant la dernière relation sur cette surface, il vient :

$$\iint_{Sf} j(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r}.\overrightarrow{\mathbf{e}_r}\mathrm{d}S = -\sigma_g\iint_{Sf}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)\overrightarrow{\mathbf{e}_r}.\overrightarrow{\mathbf{e}_r}\mathrm{d}S$$

Puisque toutes les quantités ne dépendent que de r elles sont connstantes sur la surface. La surface S_f est une coquille cylindrique. On a donc :

$$S_f = l.2\pi r$$

Alors

$$I_f = l.2\pi r.j(r) = -\sigma_g.l.2\pi r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r)$$

III. 3. Intégrant cette relation entre r_1 et r_2, il vient :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{I_f}{\sigma_g.2\pi l.r} \mathrm{d}r = [V_1 - V_2]$$

Soit :

$$\frac{I_f}{\sigma_g.2\pi l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = [V_1 - V_2]$$

Donc :

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma_g.2\pi l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

IV. Etude du câble coaxial

IV. 1. Le courant se conserve dans une tranche de longueur dx. On a donc :

$$i(x + \mathrm{d}x) + \mathrm{d}i_f = i(x) \text{ soit } \mathrm{d}i_f = -\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

IV. 2. On applique la loi d'Ohm dans la tranche dx sur les deux directions et les deux conducteurs. La résistance d'une longueur dx de conducteur est λdx
IV.2. 1. On a donc :

$$V_1(x) - V_1(x + \mathrm{d}x) = \lambda_1 \mathrm{d}x i(x) \text{ soit } \frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x} = -\lambda_1.i(x)$$

IV.2. 2. Puisque i est orienté différemment dans le conducteur A_2 que dans A_1, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} = +\lambda_2.i(x)$$

IV.2. 3. Et pour l'isolant, reprenant l'expression de la résistance de la question III.3, appliquée à la longueur dx :

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\sigma_g.2\pi \mathrm{d}x} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \mathrm{d}i_f \text{ soit } \boxed{V_1 - V_2 = -\frac{1}{\sigma_g.2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x}}$$

IV. 3. En dérivant l'équation obtenue en IV.2.3 par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x} = -\lambda_g \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}x^2}$$

En substituant les expressions obtenues en IV.2.1 et IV.2.2, il vient alors :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, i = \lambda_g \frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}x^2}$$

Posant $\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_g} = \omega^2 > 0$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}x^2} - \omega^2 i = 0}$$

Attention !!$\lambda_{1,2}$ et λ_g n'ont pas la même dimension. Les notations de l'énoncé peuvent prêter à confusion. En effet les analyses dimensionnelles des relations IV.2.1 et IV.2.2 montrent que $\lambda_{1,2}$ sont des quantités homogènes à une résistance par unité de longueur (dans le système USI, elles s'expriment en $\Omega.\ \mathrm{m}^{-1}$).

La relation obtenue dans la question IV.2.3 montre que la quantité λ_g est, elle, homogène à une résistance fois une unité de longueur (en USI, elle s'exprime en Ω. m). Le rapport ω^2 est donc bien homogène à l'inverse d'une surface (m^2)

IV. 4. La solution générique de cette équation différentielle est donnée par l'énoncé :

$$i(x) = I_1 \exp(-\omega x) + I_2 \exp(+\omega x)$$

IV.4. 1. Les constantes I_1 et I_2 sont déterminées par les conditions aux bords du fil. Le fil est infini, et le courant doit rester borné le long du câble (sa valeur ne peut pas tendre vers l'infini). Le terme en $\exp(+\omega x)$ n'est donc pas physiquement acceptable. On a donc

$$I_2 = 0$$

D'autre part, en $x = 0$ on doit avoir $i(0) = i_0$, soit nécessairement :

$$I_1 = i_o$$

Au final,

$$\boxed{i(x) = i_0 \exp(-\omega x)}$$

IV.4. 2. La courbe représenttive de cette fonction n'est rien d'autre qu'un exponentielle

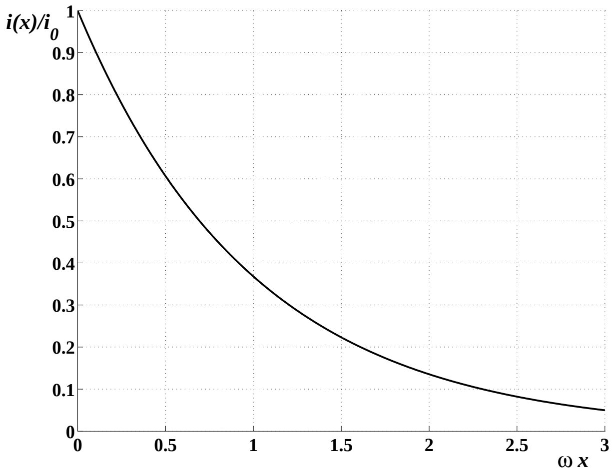

FIG. 1 - Evolution schématique du courant le long du câble

décroissante, dont la longueur caractéristique de décroissance est $\dfrac{1}{\omega}$. Un schéma de cette courbe est représentée sur la figure 1, où l'on a fait figurer les variables adimesionnées $i(x)/i_0$ et ωx en abscisses.

IV. 5. On établit maintenant l'expression de $V_1 - V_2$ et celle de la résistance du câble.

IV.5. 1. On intègre les relations obtenues en IV.2.1 et IV.2.2 entre $x' = 0$ et $x' = x$, et il vient :

$$V_1(x) - V_1(x = 0) = +\frac{\lambda_1}{\omega} i_0 \left(\exp(-\omega x) - 1\right)$$

et

$$V_2(x) - V_2(x=0) = -\frac{\lambda_2}{\omega} i_0 \left(\exp(-\omega x) - 1\right)$$

IV.5. 2. Soustrayant ces deux dernières relations, on obtient :

$$V_1(x) - V_2(x) = V_1(0) - V_2(0) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\omega} i_0 \left(\exp(-\omega x) - 1\right)$$

Cette courbe est représentée schématiquement sur le dessin de la figure 2. C'est

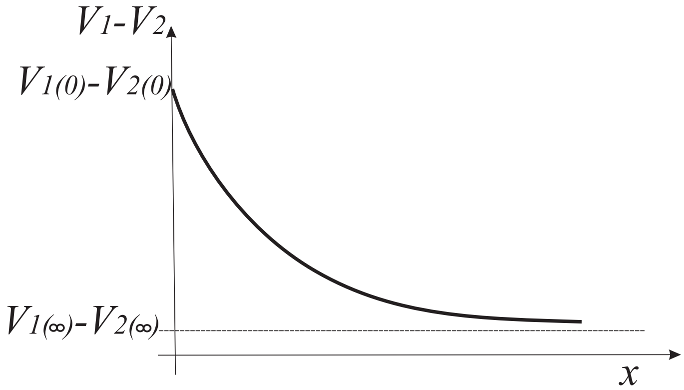

FIG. 2 - Evolution schématique de $V_1 - V_2$ en fonction de x

une exponentielle décroissante, dont la valeur à l'origine ($x = 0$) vaut $V_1(0) - V_2(0)$. Cette courbe a une asymptote limite horizontale lorsque $x \to +\infty$ qui vaut
$V_1(\infty) - V_2(\infty) = V_1(0) - V_2(0) - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\omega} i_0$

En remarque, on peut trouver cette question étonnament placée. En effet, afin de tracer correctement cette courbe, il faudrait pouvoir exprimer $V_1(0) - V_2(0)$ en fonction du courant et ainsi pouvoir exprimer la valeur de l'asymptote. Physiquement, on "sent bien" que la différence de potentiel le long du câble tend à s'atténuer jusqu'à être nulle, mais pour le moment, rien ne permet de l'affirmer mathématiquement. Il faut répondre à la question qui suit pour s'en assurer.

IV.5. 3. Il faut reprendre l'expression de $V_1 - V_2$ établie à la question IV.2.3, à savoir :

$$V_1(x) - V_2(x) = -\lambda_g \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}x} = +\lambda_g \omega i_o \exp(-\omega x)$$

On trouve ainsi la valeur de l'asymptote en $x \sim \infty$, qui vaut bien 0. La différence de potentiel s'annule en l'infini.
Cette dernière relation doit être vraie en particulier en $x = 0$. Ce qui amène à :

$$V_1(0) - V_2(0) = \lambda_g \omega i_o$$

On obtient donc la résistance R_c :

$$\boxed{R_c = \frac{V_1(0) - V_2(0)}{i_0} = \lambda_g \omega = \sqrt{\lambda_g \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)}}$$

On peut vérifier qu'en remplaçant l'expression de $V_1(0) - V_2(0)$ dans la relation obtenue à la question IV.5.2, on retrouve bien la dernière expression de $V_1 - V_2$.

V. Modélisation simple du câble

On propose, dans ce paragraphe, un modèle résistif du câble coaxial en régime continu.

V. 1. On rappelle les deux règles essentielles de l'équivalence dans l'association de résistances électriques.

1. Résistances R_a et R_b en série, la résistance équivalente R_s est $R_s = R_a + R_b$
2. Résistances R_a et R_b en parallèle, la résistance équivalente R_p est $R_p^{-1} = R_a^{-1} + R_b^{-1}$

Si $R_a = R_b = 2R$, alors $R_p = R$. Si $R_a = R_b = R$, alors $R_s = 2R$.
On répond aux questions en utilisant des schémas d'équivalence.

V.1. 1.

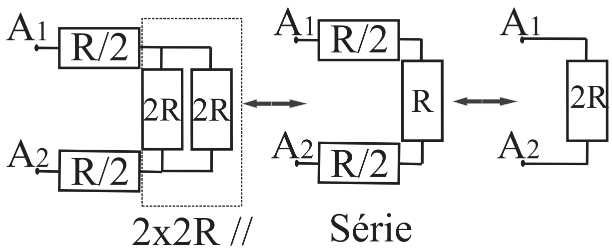

FIG. 3 - Détermination de R_1

Le schéma de la figure 3 montre que 2 résistances de 2R sont montées en parallèle entre elle, incluse dans un circuit série avec deux autre résistances de valeurs R/2.
Il vient par l'application des deux règles d'association :

$$\boxed{R_1 = 2R}$$

V.1. 2.

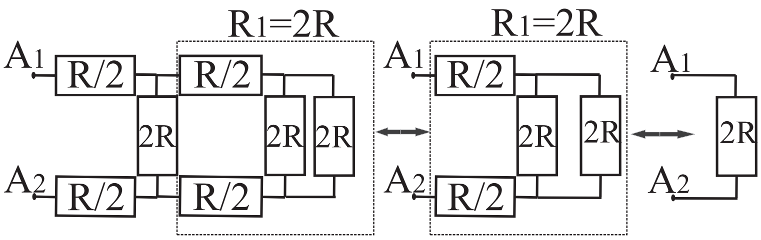

FIG. 4 - Détermination de R_2

En rajoutant un module, il suffit d'utiliser le résultat précédent sur la fin du montage comme indiqué sur la igure 4. En itérant 2 fois le résultat de la question V.1.1, il vient de façon immédiate :

$$\boxed{R_2 = R_1 = 2R}$$

V.1. 3. Il n'est nullement besoin de faire un schéma ici, juste une amorce de raisonnement par récurrence. Supposons que $R_n = 2R$. Lorsque l'on rajoute un module, sa mise en parallèle en bout de câble avec la résistance $2R$, revient à considérer que les n modules R_n sont "bouchés" par la résistance $2R$, comme cela est indiqué sur la parite gauche (première équivalence) du schéma de la figure 4. On retrouve finalement la résistance R_n. D'où :

$$\boxed{R_{n+1} = R_n = ... = R_2 = R_1 = 2R}$$

V. 2. Il faut déterminer maintenant la différence de potentiel existant entre les deux points X_1 et X_2, en bout de câble. Pour cela on appelle I, le courant passant dans le circuit au niveau du point A_1.

V.2. 1.

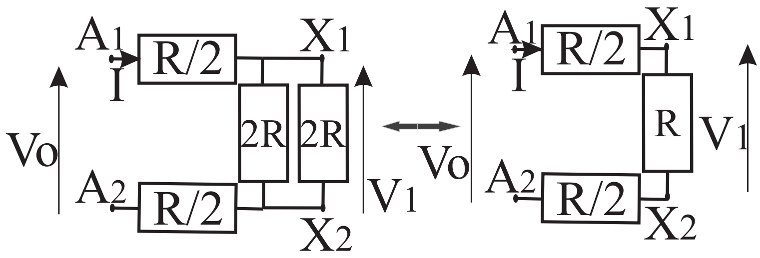

FIG. 5 - Schéma électrique équivalent à un module

Sur la figure 5 est représenté un schéma équivant faisant apparaître les deux points X_1 et X_2 dans le cas d'un seul module. La moi des mailles nous donne les relations suivantes :

$$V(A_1) - V(X_1) = I\frac{R}{2} \; ; \; V(A_2) - V(X_2) = -I\frac{R}{2}$$

Soit en faisant la différence de ces deux relations :

$$V(X_1) - V(X_2) = V(A_1) - V(A_2) - RI \quad \text{(a)}$$

D'autre part, la loi d'Ohm donne :

$$V(X_1) - V(X_2) = RI \quad \text{(b)}$$

En combinant les relations (a) et (b), il vient donc :

$$V(X_1) - V(X_2) = \frac{V(A_1) - V(A_2)}{2}$$

Soit

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0}{2}}$$

V.2. 2.

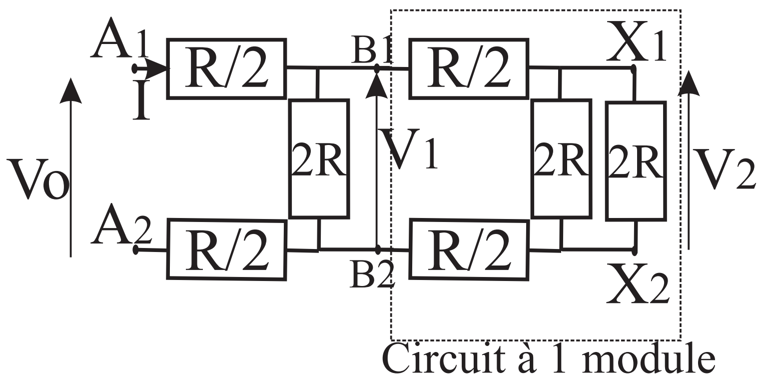

FIG. 6 - Schéma électrique pour deux modules

Sur la figure 6 est représenté un schéma du circuit à 2 modules. Vu des points

X_1 et X_2, le problème est identique à celui de la question précédente, avec en entrée du circuit les points B_1, B_2. D'après la question précédente, on a donc :

$$\boxed{V_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{V_0}{2^2}}$$

V.2. 3. En raisonnant de la même manière que dans la partie précédente pour le potentiel, et qu'à la question précédente, il vient par récurrence :

$$\boxed{V_n = \frac{V_n - 1}{2} = \frac{V_0}{2^n}}$$

V.2. 4. La série mathématique $\{V_n\}_n$ est une série dont le terme générique tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Finalement :

$$\boxed{V_\infty = 0}$$

Ce modèle résistif de câble en régime continu vérifie bien les conditions du câble long que l'on a modélisé dans la partie précédente avec un modèl continu. La différence de potentiel tend vers 0 selon un loi de puissance (exponentielle) en fonction de la longueur du câble (nombre de modules résistifs), alors que la résistance vue depuis l'entrée n'est pas modifiée par la longueur (nombre de modules). Bien évidemment, ce modèle devient correct lorsque la longueur du câble devient long devant la longueur caractéristique de décroissance de la différence de potentiel, ω^{-1}.

*

Partie B: Câble coaxial en régime sinusoïdal

. 1.

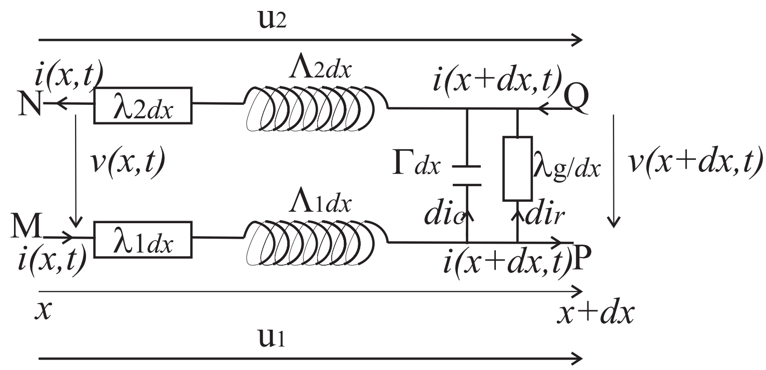

FIG. 7 - Schéma d'une portion de câble de longueur dx

La résistance d'un bout de la ligne 1, de longueur dx, est par définition de la résistance par unité de longueur λ_1dx et de λ_2dx pour la ligne 2. Pour l'inductance on a donc aussi Λ_1dx et Λ_2dx. La capcité inter-ligne (de fuite) est donc, de la même façon Γdx. Pour la résistance de fuite, la dimension de λ_g ainsi que les parties précédentes amènenent à $\frac{\lambda_g}{\mathrm{d}x}$. Ces quantités sont reportées sur le schéma de la figure 7.

. 2. En appliquant la loi des mailles sur le brin 1 ainsi que la loi d'Ohme et la caractéristique de l'inductance, il vient :

$$u_1(x,t) = V_P - V_M = -\lambda_1 \mathsf{d}x\ i(x,t) - \Lambda_1 \mathsf{d}x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

. 3. De la même façon pour le brin 2 (attention aux sens d'orientation des courants et des tensions)

$$u_2(x,t) = V_Q - V_N = \lambda_2 \mathsf{d}x\ i(x,t) + \Lambda_2 \mathsf{d}x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

. 4. Faisons la différence $u_1 - u_2$, il vient :

$$u_1 - u_2 = V_P - V_M - V_Q + V_N = V_P - V_Q - (V_M - V_N) = v(x + \mathsf{d}x, t) - v(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x}\mathsf{d}x$$

D'autre part, les deux questions précédentes donnent :

$$u_1 - u_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)\mathsf{d}x\ i(x,t) - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\mathsf{d}x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

D'où

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -(\lambda_1 + \lambda_2) i(x,t) - (\Lambda_1 + \Lambda_2)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (1)}$$

. 5. La relation entre le courant et la tension aux bornes de la capacité est :

$$\frac{\partial v(x + \mathsf{d}x, t)}{\partial t} = \Gamma \mathsf{d}x\ \mathsf{d}i_C$$

Comme au premier ordre :

$$v(x + \mathsf{d}x, t) = v(x,t) + \frac{\partial v}{\partial \mathsf{d}x}\mathsf{d}x \sim v(x,t)$$

Il vient donc :

$$\boxed{\Gamma \mathsf{d}x \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \mathsf{d}i_C}$$

On fait de même pour le courant di_R en y appliquant la loi d'Ohm :

$$\boxed{\frac{\lambda_g}{\mathsf{d}x}\mathsf{d}i_R = v(x,t)}$$

. 6. La loi de nœuds nous donne :

$$i(x,t) = i(x + \mathsf{d}x, t) + \mathsf{d}i_C + \mathsf{d}i_R$$

Soit :

$$\mathsf{d}i_C + \mathsf{d}i_R = -\frac{\partial i}{\partial x}\mathsf{d}x$$

Soit en utilisant les relations de la question précédente :

$$-\frac{\partial i}{\partial x}\mathsf{d}x = \Gamma \mathsf{d}x \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{\mathsf{d}x}{\lambda_g} v(x,t)$$

D'où

$$\boxed{\Gamma \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\lambda_g} v(x,t) = -\frac{\partial i}{\partial x} \quad (2)}$$

. 7. Il faut éliminer le courant entre le relations couplées (1) et (2). Pour cela on dérive (1) par rapport à x et (2) par rapport à t. Il vient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -(\lambda_1+\lambda_2)\dfrac{\partial i}{\partial x} - (\Lambda_1+\Lambda_2)\dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t \partial x} & (a) \\ \Gamma\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\lambda_g}\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t\partial x} & (b) \end{cases}$$

La différence $(a)-(\Lambda_1+\Lambda_2)(b)$ donne la relation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\Lambda_1+\Lambda_2)\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

On injecte la relation (2) dans cette expression afin de supprimer le terme en $\dfrac{\partial i}{\partial x}$, il vient donc :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\Lambda_1+\Lambda_2)\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda_1+\lambda_2)\Gamma\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g}v(x,t) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Finalement, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\Lambda_1+\Lambda_2)\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left(\Gamma(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\right)\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g}v(x,t) \quad (3)}$$

Le terme de gauche est le terme générique de l'équation des ondes, où la célérité,c_o de l'onde est donnée par le facteur

$$c_o^2 = \frac{1}{(\Lambda_1+\Lambda_2)\Gamma}$$

Le terme de droite est lié à la résistivité des fils d'une part et au courants de fuite entre les deux fils d'autre part. Comme dans toute équation de propagation l'existence d'un phénomène dissipatif fait apparaître une dérivée du premier ordre en temps. Ainsi si la résistance de fuite entre les deux lignes tend vers l'infini, le terme en ordre 0 en v s'annule et seule interviendra la dissipation résistive dans les fils 1 et 2.

. 8. Comme souvent dans les équations de propagation, on cherche à développer les solutions sous forme d'ondes planes, plus ou moins atténués. On arrive donc à la formulation que propose l'énoncé. Avant de se jeter dans des calculs immédiatement, on peut déjà avancer quelques arguments.

.8. 1. Les nombres α et β étant réels, α dirige l'atténuation de l'onde le long du câble alors que β est une grandeur inverse à la longueur d'onde. D'après tout ce qui précède et parce que la différence de potentiel $v(x,t)$ doit rester finie et dans le temps et dans l'espace, on ne peut physiquement pas accepter une solution qui tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. Si α est positif, alors le terme en $\exp(+\alpha x)$ ne peut exister dans la solution. Donc :$V_2 = 0$.
D'autre part, comme en $x=0$, $V(0,t) = V_0\exp(j\omega t)$, on en déduit immédiatment que $V_1 = V_0$.

.8. 2. On cherche une solution de la forme

$$\underline{v}(x,t) = V_0\exp(sx)\exp(j\omega t)$$

avec s nombre complexe dont la partie réelle est négative et la partie imaginaire aussi ($s = -\alpha - j\beta$).

- $\delta = \alpha^{-1}$ est la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde dans le câble. C'est la partie évanescente de l'onde.
- $\lambda = 2\pi\beta^{-1}$ est la longueur d'onde dans le câble. C'est la longueur de périodicité spatiale de l'onde. Lorsque $\delta < \lambda$ l'onde s'atténue sur une distance plus courte que celle de sa reproduction. On dit que l'onde est évanescente. Il n'y a pas de propagation.
- La vitesse de phase de l'onde v_ϕ est donnée par le rapport

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$$

- La vitesse de groupe v_g de l'onde (vitesse de propagation de l'énergie) est donnée par la dérivée

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}$$

Il faut donc exprimer ces quatre quantités caractérisant l'onde de tension, en fonction des données du problème et de la pulsation ω. Pour cela, il faut établir la relation entre β et ω, qui constitue **la relation de dispersion de l'onde**.

En utilisant l'expression de s dans l'équation (3), il vient :

$$s^2 + \frac{\omega^2}{c_o^2} = j\omega\left(\Gamma(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\right) + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g}$$

Soit

$$s^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = +j\omega\left(\Gamma(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\right) + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g} - \frac{\omega^2}{c_o^2}$$

D'où

$$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g} - \frac{\omega^2}{c_o^2} \text{ et } 2\alpha\beta = \omega\left(\Gamma(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\right)$$

Si l'on pose

$$A^2 = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_g} \text{ et } B^2 = \left(\Gamma(\lambda_1+\lambda_2) + \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)}{\lambda_g}\right)$$

Il nous faut résoudre le système :

$$\alpha\beta = \frac{B^2}{2}\omega \text{ et } \alpha^2 - \beta^2 = A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}$$

On a donc :

$$\beta = \frac{B^2\omega}{2\alpha} \text{ et } -\frac{B^4\omega^2}{4\alpha^2} + \alpha^2 = A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}$$

La dernière équation s'écrit :

$$\alpha^4 - \left(A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}\right)\alpha^2 - \frac{B^4\omega^2}{4} = 0\,(C)$$

α^2 doit être un nombre réel positif, le discriminant de cette équation doit donc exister et être positif. Il faut donc que :

$$\left(A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}\right)^2 + B^4\omega^2 > 0$$

Ce qui est toujours vrai puisque le terme de gauche est une somme de carrés. Alors les solutions $\alpha^2_{+,-}$ de l'équation (C) sont :

$$\alpha^2_{+,-} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega^2}{c_o^2} + A^2 \pm \sqrt{\left(A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}\right)^2 + B^4\omega^2}\right)$$

Seule la solution α_+^2 est positive. D'où

$$\boxed{\alpha = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega^2}{c_o^2} + A^2 + \sqrt{\left(A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}\right)^2 + B^4\omega^2}\right)}}$$

et

$$\boxed{\beta = \frac{B^2\omega}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(-\frac{\omega^2}{c_o^2} + A^2 + \sqrt{\left(A^2 - \frac{\omega^2}{c_o^2}\right)^2 + B^4\omega^2}\right)}}}$$

Telles quelles ces relations sont difficilement exploitables. On peut se placer dans le régime harmonique tel que $\omega^2 > A^2 c_o^2$, ce qui permet de faire un développement limité du premier ordre sous le radical de la racine. On rappelle que :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + o(u) \sim 1 + \frac{u}{2} \text{ pour } u < 1$$

Il vient alors :

$$\alpha \sim \frac{B^2 c_o}{2} \text{ et } \beta \sim \frac{\omega}{c_o}$$

La distance δ d'atténuation vaut alors $\delta = \dfrac{2}{B^2 c_o}$ et la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi c_o}{\omega} = \dfrac{4\pi}{\delta B^2 \omega}$.

Dans ce modèle résistif, à haute fréquence, la longueur d'onde devient plus petite que la longueur d'atténuation. Ce câble est donc plus adpatée aux hautes fréquences. Dans la pratique, cependant, les résistances sur les lignes dépendent de la pulsation et à hautes fréquences, elles deviennent prépondérantes. L'atténuation de l'onde se fait alors par un phénomène nommé "effet de peau".

Enfin les vitesses de phase et groupe sont données par

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = c_o$$

et

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = c_o$$

Et on retrouve la quasi-universelle relation de Rayleigh pour les ondes :

$$v_\phi v_g = c_o^2$$

--- **FIN** ---