
PARTIE A : DIFFUSION THERMIQUE

I. Conduction thermique simple dans le matériau

I.1. On considère le système fermé Σ constitué par une tranche de matériau délimitée par les deux plans d'abscisses x et $x+dx$, orthogonaux à l'axe \vec{e}_x . Ce système est donc le volume de matériau parallélépipédique de volume $\Omega_\Sigma = S dx$, entouré par la surface fermée S_Σ . A cette dernière est associé un vecteur élémentaire de surface $d^2\vec{S}$, local, orthogonal à la surface et orienté vers **l'extérieur du volume**.

La quantité de chaleur δQ_Σ échangée pendant un laps de temps δt est par définition du vecteur \vec{j}_u :

$$\delta Q_\Sigma = - \iint_{S_\Sigma} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S} \delta t \quad (1)$$

car $d^2\vec{S}$ est **orienté vers l'extérieur du volume**.

S_Σ est composée de 6 faces. Les deux surfaces S_1^x et S_2^x ont pour vecteur unitaire orthogonal \vec{e}_x , S_1^y et S_2^y ont pour vecteur unitaire orthogonal \vec{e}_y , et enfin S_1^z et S_2^z ont pour vecteur unitaire orthogonal \vec{e}_z . Cette surface fermée est représentée sur la figure 1.

La relation (1) devient donc par la relation de Chasles :

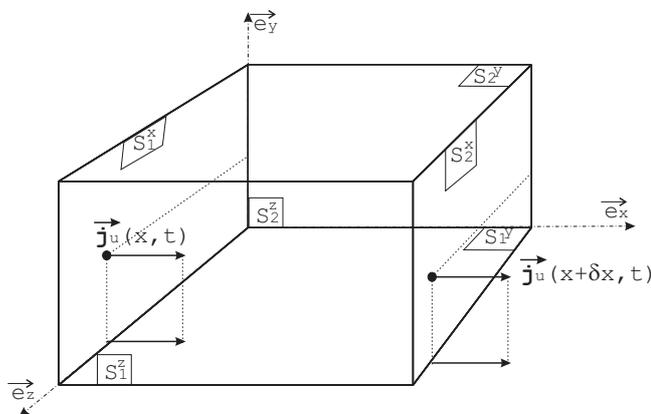


FIG. 1 - Schéma du volume d'épaisseur δx

$$\begin{aligned} \delta Q_\Sigma = & - \iint_{S_1^x} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_1^x \delta t - \iint_{S_2^x} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_2^x \delta t \\ & - \iint_{S_1^y} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_1^y \delta t - \iint_{S_2^y} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_2^y \delta t \\ & - \iint_{S_1^z} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_1^z \delta t - \iint_{S_2^z} \vec{j}_u \cdot d^2\vec{S}_2^z \delta t \end{aligned}$$

Or

$$d^2\vec{S}_1^z = -d^2S_1^x \vec{e}_x \quad \text{et} \quad d^2\vec{S}_2^z = d^2S_2^x \vec{e}_x$$

Il vient donc :

$$\delta Q_\Sigma = \oint_S j_u(x, t) d^2S \vec{e}_x \cdot (-\vec{e}_x) \delta t - \iint_S j_u(x+dx, t) d^2S \vec{e}_x \cdot (\vec{e}_x) \delta t = -S \delta t (j_u(x+dx, t) - j_u(x, t))$$

En faisant une analyse au premier ordre, il vient :

$$\delta Q_{\Sigma} = -S \delta t \frac{\partial j_u}{\partial x} dx$$

D'autre part, par application du premier principe, entre les instant t et $t + \delta t$, la variation d'énergie interne dU du volume Ω_{Σ} est :

$$dU = \delta Q_{\Sigma} = \mu \Omega_{\Sigma} c_v (T(x, t + \delta t) - T(x, t)) = \mu S dx c_v \frac{\partial T}{\partial t} \delta t$$

Egalant les deux expressions de δQ_{Σ} , il vient :

$$\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_u}{\partial x}$$

Or d'après la loi de Fourier :

$$\frac{\partial j_u}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On a donc :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = + \frac{\lambda}{\mu c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

--- AUTRE MÉTHODE ---

On considère un volume quelconque τ de matériau entouré par une surface S_{τ} fermée, localement orientée vers l'extérieur du volume. La quantité de chaleur δQ échangée par le système composé par la matière contenue dans le volume est par définition de \vec{j}_u :

$$\delta Q = - \oint_{S_{\tau}} \vec{j}_u \cdot \vec{d}^2\mathbf{S} \delta t$$

Grâce au théorème de Green Ostrogradsky, on peut écrire cette égalité sur le volume τ :

$$\delta Q = - \iiint_{\tau} \operatorname{div}(\vec{j}_u) \delta t d\tau$$

D'un autre côté, on imagine un point P quelconque du volume τ entouré d'un élément différentiel de volume $d\tau$, de masse m . On définit la densité volumique d'énergie interne locale $v(P, t)$ comme :

$$U_{\tau} = \iiint_{\tau} v(P, t) d\tau$$

Entre les instant t et $t + \delta t$, la variation d'énergie interne dU_{τ} peut s'écrire au premier ordre :

$$dU_{\tau} = \frac{dU_{\tau}}{dt} \delta t = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} v(P, t) d\tau \delta t$$

Comme le volume ne dépend pas du temps, on peut permuter l'ordre de dérivation en temps et l'intégrale :

$$dU_{\tau} = \iiint_{\tau} \frac{\partial v(P, t)}{\partial t} d\tau \delta t$$

Pendant le laps de temps δt , le premier principe donne :

$$dU_{\tau} = \delta Q \text{ soit } \iiint_{\tau} \frac{\partial v(P, t)}{\partial t} d\tau \delta t = - \iiint_{\tau} \operatorname{div}(\vec{j}_u) \delta t d\tau$$

Comme cette égalité ne dépend pas du volume considéré, les intégrandes doivent être égaux. Soit :

$$\boxed{\frac{\partial v(P, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\mathbf{j}}_u) = 0}$$

Ceci constitue l'équation locale de conservation, qui est vérifiée par toutes les quantités fondamentales qui se conservent (énergie, masse, charge électrique).

Si la variation d'énergie interne est liée uniquement à la variation de température du système, alors :

$$dU_\tau = U_{\tau}(t + \delta t) - U_{\tau}(t) = \iiint_{\tau} \mu c_v (T(P, t + \delta) - T(P, t))$$

Donc :

$$\frac{\partial v(P, t)}{\partial t} = \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t}(P, t)$$

Or d'après la loi de Fourier :

$$\vec{\mathbf{j}}_u = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)$$

Il vient donc en remplaçant les expressions de $\vec{\mathbf{j}}_u$ et $v(P, t)$ dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$\operatorname{div}(\vec{\mathbf{j}}_u) + \frac{\partial v(P, t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(T)) + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t}(P, t) = -\lambda \nabla^2 T + \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t}(P, t)$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien, noté aussi Δ .

Puisque cette dernière équation doit s'annuler, il vient donc

$$-\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \lambda \nabla^2 T = 0$$

C'est l'équation de diffusion de la chaleur tridimensionnelle. Puisque le problème est unidimensionnel selon x , le Laplacien n'est rien d'autre que la dérivée partielle seconde selon x . On a donc, pour le problème ici :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

I.2. Il vient immédiatement :

$$A = \frac{\lambda}{\mu c_v}$$

L'analyse dimensionnelle nous donne immédiatement la dimension de A qui est une surface par unité de temps. Son unité dans le système international est donc le $m^2.s^{-1}$

I.3. Attention, l'énoncé ici est un peu ambigu. Le mot "stationnaire" ne signifie pas en toute généralité "indépendant du temps". Il n'y a qu'à se rapporter à l'électrocinétique où l'on parle de régime stationnaire sinusoïdal. Ici, il faut comprendre "stationnaire permanent". C'est à dire **indépendant du temps**.

Dans l'hypothèse où la température est indépendante du temps, il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

L'équation de diffusion devient donc :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

I.4. En intégrant selon x , il vient immédiatement :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = K_1$$

où K_1 est une constante.

Relation que l'on intègre à nouveau selon x .

$$T(x) = K_1 x + K_2$$

où K_2 est une constante.

Déterminons les constantes K_1 et K_2 grâce aux conditions de bords :

$$T(x=0) = T_1 \text{ et } T(x=L) = T_2$$

Soit :

$$K_1 \times 0 + K_2 = T_1 \text{ et } K_1 L + K_2 = T_2$$

On a donc :

$$K_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} \text{ et } K_2 = T_1$$

Donc :

$$T(x,t) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

La variation de la température en fonction de la position dans le matériau est tout simplement linéaire.

I.5. Par définition du vecteur \vec{j}_u , le flux vérifie :

$$\Phi_u = \iint_S \vec{j}_u \cdot \vec{d^2S}$$

Sur une section droite $\vec{d^2S}$ est orienté selon \vec{e}_x . D'autre part \vec{j}_u ne dépend **que** de x (et pas de y et z). On a donc :

$$\Phi_u = j_u(x,t)S = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{L}$$

Remarque : T_1 étant supérieur à T_2 , Φ_u est positif. La chaleur se transmet de la face chaude vers la face froide. Ce résultat respecte (heureusement, sinon il serait faux!) le second principe de la Thermodynamique.

I.6.

II. Diffusion thermique dans un combustible nucléaire

II.1. Dans le volume Ω_Σ de la tranche d'épaisseur dx est créée pendant le laps de temps δt une quantité de chaleur δQ_c qui est donc :

$$\delta Q_c = \iiint_{\Omega_\Sigma} \sigma_u \delta t d\tau$$

La quantité totale δQ de chaleur échangée par le système contenu dans le volume est :

$$\delta Q = \delta Q_c - \oint_{S_\tau} \vec{j}_u \cdot \vec{d^2S} \delta t = \iiint_{\Omega_\Sigma} (\sigma_u - \text{div}(\vec{j}_u)) \delta t d\tau$$

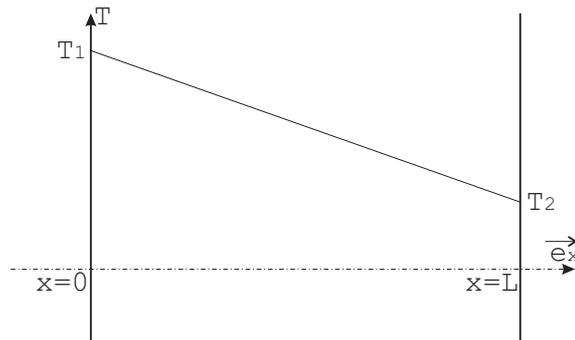


FIG. 2 - Courbe Représentative de T en fonction de x

En appliquant le premier principe de la thermodynamique comme à la question I.1, il vient pour la variation d'énergie interne de la matière contenue dans le volume Ω_Σ :

$$dU_{\Omega_\Sigma} = \iiint_{\Omega_\Sigma} \mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} \delta t d\tau = \delta Q = \iiint_{\Omega_\Sigma} (\sigma_u - \text{div}(\vec{j}_u)) \delta t d\tau$$

II.2. Comme d'autre part, on a vu que (voir question I.1 et l'équation (??)) cette relation doit rester vrai quel que soit le volume d'intégration, il vient donc :

$$\mu c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_u - \text{div}(\vec{j}_u)$$

En utilisant la loi de Fourier comme précédemment, il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma_u}{\mu c_v} \quad (2)$$

II.3. Puisque le régime est supposé indépendant du temps, l'équation (2) devient :

$$\frac{\lambda}{\mu c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\sigma_u}{\mu c_v} \text{ soit } \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\sigma_u$$

En intégrant deux fois selon la variable x , il vient un polynôme de degré deux pour T , soit :

$$T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_0$$

où C_1 et C_0 sont deux constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_1 = C_0 \text{ et } T(x=L) = T_2 = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} L^2 + C_1 L + C_0$$

Soit :

$$C_0 = T_1 \text{ et } C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\sigma_u L}{2\lambda}$$

Il vient donc :

$$T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + \left[\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\sigma_u L}{2\lambda} \right] x + T_1$$

II.4. On reprend la relation du flux utilisé à la question I.5 :

$$\Phi_u = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

que l'on applique à la fonction $T(x)$ que l'on vient d'établir, soit :

$$\Phi_u = S \sigma_u x - S \left[\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\sigma_u L}{2} \right]$$

Il vient donc immédiatement :

$$\Phi_{u,0} = -S \left[\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{L} + \frac{\sigma_u}{2} L \right] \text{ et } \Phi_{u,L} = -S \frac{\lambda(T_2 - T_1)}{L} + S \frac{\sigma_u}{2} L$$

II.5. On peut remarquer que ($T_1 > T_2$) $\Phi_{u,L} > 0$. D'autre part, $\Phi_{u,0}$ peut être positif ou négatif selon les valeurs des caractéristiques du matériau et de la puissance volumique créée. Sur la face F_1 deux phénomènes de flux ont des effets opposés. Le premier, étudié dans la partie I est lié à la conduction dans le matériau (pour ce phénomène le flux en $x=0$ est positif). Le second phénomène est "l'évacuation" de la chaleur produite par les résidus radioactifs. Cette évacuation se fait par les deux faces et tend à "faire sortir" la chaleur produite du volume par les deux faces F_1 et F_2 . En régime stationnaire permanent la chaleur produite au sein du matériau est donc **évacuée par conduction dans le matériau** et évacuée ensuite au niveau des faces par le milieu extérieur au béton. Ce dernier transfert peut se faire par trois phénomènes de transfert thermiques (qui peuvent d'ailleurs coexister) :

1. La conduction dans le milieu extérieur.
2. La convection par le milieu extérieur (elle n'aura lieu que si le milieu extérieur est assez fluide)
3. Le rayonnement électromagnétique thermique des faces F_1 et F_2

Remarque : La réponse à cette question est dans la partie III, puisque dès la première phrase il est question de convection et de rayonnement sur les deux plaques. On peut donc répondre à cette question simplement en ayant lu l'énoncé

II.6. Ici, $T_1 = T_2 = T_0$. Avant de répondre précisément aux questions posées, déterminons immédiatement la fonction $T(x)$. On reprend donc la relation de la question II.3. Il vient :

$$T(x) = \frac{\sigma_u}{2\lambda} x \cdot (L - x) + T_0$$

II.6. 1. La question est étonnante, ici, puisque pour faire correctement cette figure, il faut répondre avant aux questions qui suivent. La température suit une expression de type "parabole" en fonction de la position dans le béton, comme représenté sur la figure 3

II.6. 2. La dérivée de la température en fonction de x s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\sigma_u}{\lambda} x + \frac{\sigma_u}{2\lambda} L$$

L'extrémum de température se situe au point où la dérivée s'annule soit pour x_m tel que :

$$-\frac{\sigma_u}{\lambda} x_m + \frac{\sigma_u}{2\lambda} L = 0 \implies x_m = \frac{L}{2}$$

II.6. 3. Au point $x_m = L/2$ la température vaut alors T_m

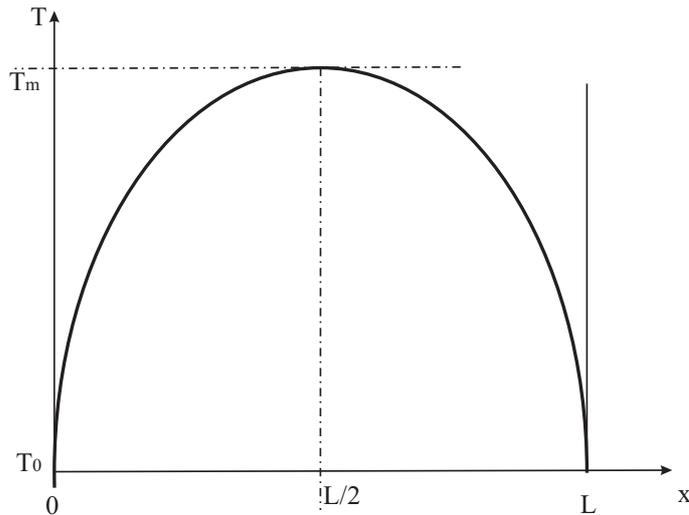
$$T_m = \frac{\sigma_u}{8\lambda} L^2 + T_0$$

II.6. 4. La température maximale varie comme le carré de l'épaisseur de béton. Il s'agit donc de bien gabariser l'épaisseur de la plaque, afin d'avoir une température maximale adéquate, lorsque l'on "vitriifie" les éléments radioactifs dans le béton.

II.6. 5. Application numérique :

1.

$$\Phi_{u,L} = S \frac{\sigma_u}{2} L = 1 \cdot \frac{3000}{2} \times 0,5 = 750 \text{ W}$$

FIG. 3 - Allure de la courbe $T(x)$

2.

$$x_m = 25 \cdot 10^{-2} \text{ m et } T_m = \frac{3 \cdot 10^3}{8 \times 1,2} (5 \cdot 10^{-1})^2 + 290 \sim 368 \text{ K}$$

3. Soit T_K la température maximale à ne pas dépasser. D'après la question II.6.3, T_K est situé au milieu de la tranche de matériau et vérifie donc :

$$T_K - T_0 = \frac{\sigma_u}{8\lambda} L_m^2 \text{ soit } L_m = \sqrt{\frac{8\lambda}{\sigma_u} (T_K - T_0)} = \sqrt{\frac{8 \times 1,2}{3000} (500 - 290)} \sim 0,82 \text{ m}$$

III. Refroidissement par échange radioconvectif

III.1. En régime stationnaire permanent, la température reste constante en un point donné. C'est le cas sur la surface F_2 . Il n'y a pas d'accumulation d'énergie au sein du béton. Le flux d'énergie thermique qui arrive par conduction du côté gauche (L^-) de la face F_2 est donc égal au flux qui sort par le côté droit (L^+). On a donc la relation :

$$\Phi_{rc} = \Phi'_{u,L}$$

III.2. Cette question est une application de la partie II, où l'on a calculé l'expression générale de la température en fonction de la position quand les températures des faces sont fixées. La nouveauté ici, c'est que la température de la face F_2 n'est pas explicitement connue.

Notons $T_L = T(x = L)$ la température de la face F_2 . Cette température est pour le moment inconnue. Nous allons la déterminer et ensuite nous utiliserons l'expression de la température donnée en II.3, appliquée à cette température de bord T_L .

D'après la réponse à la question II.4, on a l'expression de $\Phi_{u,L}$ dans le béton. Ce flux est égal à $\Phi'_{u,L}$. En remplaçant dans l'expression de la question II.4, T_2 par T_L , il vient :

$$\Phi'_{u,L} = -S \frac{\lambda(T_L - T_1)}{L} + S \frac{\sigma_u}{2} L$$

Or

$$\Phi_{rc} = \Phi'_{u,L} = h_{rc} S (T_L - T_{\text{ext}})$$

Il vient donc, puisque $T_1 = T_0$:

$$\begin{aligned} h_{rc} S (T_L - T_{\text{ext}}) &= -S \frac{\lambda (T_L - T_0)}{L} + S \frac{\sigma_u L}{2} \\ \Rightarrow T_L \left(h_{rc} + \frac{\lambda}{L} \right) &= \frac{\lambda}{L} T_0 + \frac{\sigma_u L}{2} + h_{rc} T_{\text{ext}} \\ \Rightarrow T_L &= \frac{\lambda}{h_{rc} L + \lambda} T_0 + \frac{L h_{rc}}{(L h_{rc} + \lambda)} T_{\text{ext}} + \frac{\sigma_u L}{2(L h_{rc} + \lambda)} L \end{aligned}$$

D'après la réponse à la question II.3, on a l'expression de $T(x)$ dans le béton, avec $T_2 = T_L$ et $T_1 = T_0$. Soit :

$$T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + \left[\frac{\lambda}{h_{rc} L^2 + L\lambda} T_0 - \frac{T_0}{L} + \frac{h_{rc}}{(h_{rc} L + \lambda)} T_{\text{ext}} + \frac{\sigma_u}{2(L h_{rc} + \lambda)} L + \frac{\sigma_u L}{2\lambda} \right] x + T_0$$

Expression fort lourde mais qui est l'expression demandée par l'énoncé.

Si on a pris la peine de lire l'énoncé jusqu'au bout, on s'aperçoit que la température extérieure T_{ext} n'est rien d'autre que la température T_0 . Il vient alors :

$$T_L = T_0 + \frac{\sigma_u L}{2(L h_{rc} + \lambda)} L$$

Alors

$$T(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 + \frac{\sigma_u L}{2\lambda} \left[\frac{1}{\left(\frac{L h_{rc}}{\lambda} + 1 \right)} + 1 \right] x + T_0$$

III.3. Application numérique

1.

$$\Phi'_{u,L} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x=L) = +\lambda S \sigma_u L - S \frac{\sigma_u L}{2} \left[\frac{1}{\left(\frac{L h_{rc}}{\lambda} + 1 \right)} + 1 \right] = \frac{S \sigma_u L}{2} \left(1 - \frac{1}{\frac{L h_{rc}}{\lambda} + 1} \right)$$

Numériquement, il vient :

$$\Phi'_{u,L} = \frac{1 \times 3000 \times 0,5}{2} \left(1 - \frac{1}{\frac{0,5 \times 5}{1,20} + 1} \right) \sim 506 \text{ W}$$

2. A la question II.6, on avait calculé un flux de l'ordre de 750 Watts. $\Phi'_{u,L}$ est donc **inférieur** à cette valeur. On peut aussi remarquer que la température T_L est plus grande que T_0 . Le flux de chaleur échangée par l'ensemble du béton est donc moins important avec ce phénomène de radio-convection "libre" que lorsqu'on impose la température sur la face F_2 . **Le combustible est moins bien refroidi.**
3. Grâce à l'expression de la question III.2, il vient immédiatement :

$$h_{rc} \rightarrow \infty \Rightarrow T_L \sim T_0$$

*

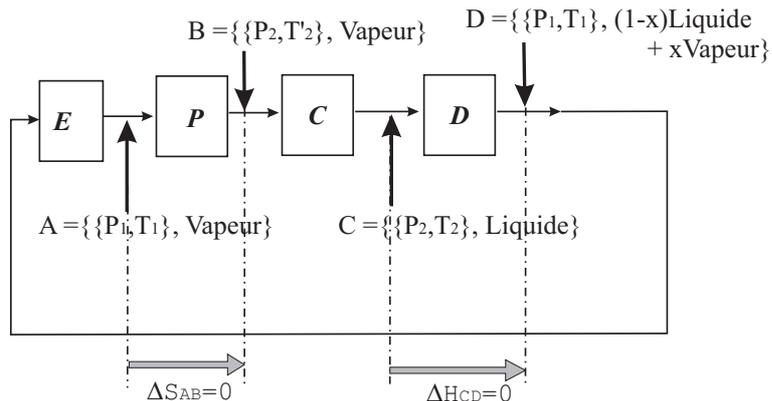


FIG. 4 - Schéma des transformations subies par le fluide

Avant de commencer à répondre, il est important de schématiser toute l'explication de la première page de l'énoncé afin d'assimiler les notations et de comprendre le fonctionnement du cycle. Le mieux est de faire une figure la plus complète possible, comprenant aussi les hypothèses sur le type de transformation subie par le fluide, comme indiqué sur la figure 4.

Il faut bien voir qu'entre les points D et A , aucun paramètre thermodynamique de contrainte ne change pour le fluide (même pression, même température). On assiste juste à une évaporation à l'équilibre de la fraction de liquide restant à l'état D .

I. Diagramme du corps pur

I.1.

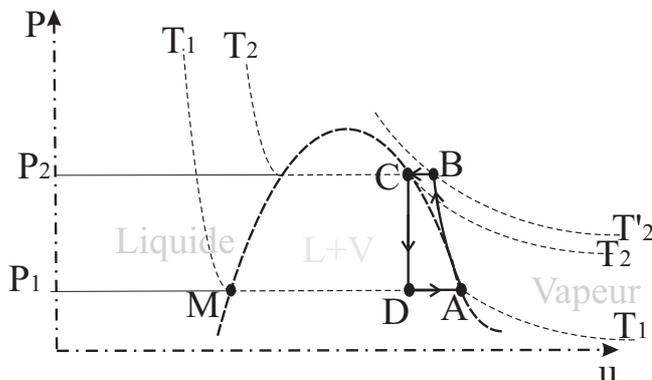


FIG. 5 - Schéma de Clapeyron $P - u$

Le trajet de transformation AB est une compression isentropique (pas d'échange d'entropie) d'un gaz sans changement de phase. Le trajet BC est un changement de phase par refroidissement. Si l'on regarde le tableau des valeurs numériques de l'énoncé : $T_2 = 310$ K correspond à la température de vapeur saturante pour la pression $P_2 = 8.5 \cdot 10^5$ Pa. En C , le fluide est donc dans l'état liquide à la pression de vapeur saturante (sur la courbe de coexistence des deux phases dans un diagramme de phase de Clapeyron). Enfin entre CD , le fluide subit une détente isenthalpique qui ramène la pression et la température à celles du point A , mais seulement une partie du fluide change de phase. Puis sur le trajet DA , la partie encore liquide finit de se vaporiser. Sur le schéma de la figure 5, on retrouve tous ces points. Le rapport entre les distances AD , AM et DM définit graphiquement le ratio x .

Attention !! Les données numériques mélangent les système d'unité de mesure de la quantité de matière ; les chaleurs latentes sont exprimées par unité molaire, les capacités calorifiques par unité massique et tout l'énoncé se base sur une unité de masse. Il faut donc faire attention au moment des applications numériques

I.2.

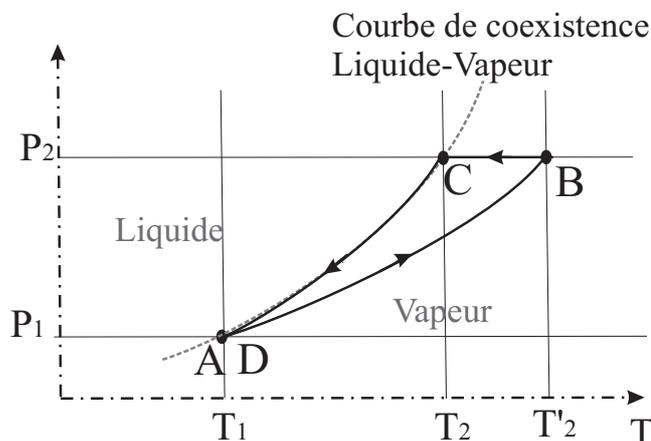


FIG. 6 - Schéma de Clapeyron $P - u$

FIG. 7 - Schéma du cycle de transformation en variables P, T

Le cycle est supposé quasi-statique d'après l'énoncé, le fluide est donc toujours à l'équilibre pendant les transformations qu'il subit. Sur le schéma 7, est représenté le cycle suivi par le fluide en diagramme (P, T) . Les points A et D sont confondus puisqu'ils correspondent à une même pression et une même température. Ils sont simplement distincts par le volume massique de chacune des deux phases - qui n'apparaît pas dans ce diagramme en deux dimensions. Puisque le cycle se fait à l'équilibre, la transformation CD se fait sur la courbe de coexistence Liquide-Vapeur.

II. Compression $A \rightarrow B$

II.1. Le fluide est un Gaz Parfait entre les point A et B qui subit une compression isentropique. On sait que les variables d'états suivent alors la loi dite de loi de Laplace : la quantité $P.T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ reste constante pendant la transformation. On a donc entre A et B :

$$P_1 T_1^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)} = P_2 T_2^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}$$

Soit

$$T_2' = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

II.2. Le travail échangé pendant la transformation AB est égale à la variation d'enthalpie. Pour un gaz parfait, la variation d'enthalpie lors d'une transformation sans changement de phase est proportionnelle à la variation de température. pour une unité de masse, on a :

$$\Delta h_{AB} = c_{p,m} \Delta T$$

La relation de Mayer nous indique aussi que :

$$c_{p,m} - c_{v,m} = \frac{R}{M} \text{ soit } c_{p,m} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{R}{M}$$

On en déduit donc que :

$$\Delta h_{AB} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} \Delta T$$

D'où l'expression de w :

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} (T_2' - T_1)$$

II.3. Application numérique :

$$T_2' = 240 \left(\frac{0,85}{8,5} \right)^{\frac{1-1,20}{1,20}} \sim 352 \text{ K}$$

$$w = \frac{1,2}{1,2 - 1} \frac{8,31}{120 \cdot 10^{-3}} (352 - 240) \sim 46,5 \text{ kJ kg}^{-1}$$

III. Refroidissement et liquéfaction dans le condenseur ($B \rightarrow C$)

III.1. La première goutte de fréon liquide apparaîtra lors que l'on aura atteint la température T correspondant à la pression de vapeur saturante $P^*(T) = P_2$.

Soit, d'après le tableau de l'énoncé, la température T_2 . **III.2.** On peut schématiser la transformation $B \rightarrow C$ subie par le fluide par une succession de deux transformations : un refroidissement du gaz de T_2' à T_2 à pression constante (Refroidissement), suivi d'un changement de phase à T_2 (Liquéfaction).

On indexe par la lettre R les quantités considérées lors du refroidissement et par la lettre L celles lors de la liquéfaction.

Il vient alors :

$$\Delta h_{BC} = \Delta h_{BC}^R + \Delta h_{BC}^L$$

Pour une unité de masse d'après la question II.2, on a :

$$\Delta h_{BC}^R = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} (T_2 - T_2')$$

D'autre part, lors de la liquéfaction, la variation d'enthalpie est l'opposé de la chaleur latente de vaporisation **par unité de masse** (L_V est molaire dans l'énoncé!) :

$$\Delta h_{BC}^L = -\frac{L_v(T_2)}{M}$$

Soit au final

$$\Delta h_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} (T_2 - T_2') - \frac{L_v(T_2)}{M}$$

III.3. Application numérique :

$$\Delta h_{BC} = \frac{1,2}{1,2 - 1} \frac{8,31}{120 \cdot 10^{-3}} (310 - 352) - \frac{130 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^{-3}} \sim -1,1 \cdot 10^3 \text{ kJ. kg}^{-1}$$

IV. Détente isenthalpique $C \rightarrow D$

IV.1. L'enthalpie est une fonction d'état extensive. Pour l'état D , l'enthalpie massique, $h(D)$ du système composé par l'ensemble du fluide est donc l'addition de l'enthalpie massique de la partie vapeur et de celle de la partie liquide.

Soit :

$$h(D) = (1 - x)h_{liq}(T_1) + xh_{vap}(T_1)$$

Pour l'état C , il n'y a qu'une seule phase :

$$h(C) = h_{liq}(T_2)$$

La transformation $C \rightarrow D$ étant isenthalpique :

$$\Delta h_{CD} = h(D) - h(C) = (1-x)h_{liq}(T_1) + xh_{vap}(T_1) - h_{liq}(T_2) = 0$$

Il vient donc l'égalité :

$$\boxed{h_{liq}(T_2) = (1-x)h_{liq}(T_1) + xh_{vap}(T_1)}$$

IV.2. L'énoncé est ici ambigu par rapport à une notation non définie $\Delta h_{liq}(CD)$. Il est donc primordial d'indiquer au correcteur ce que l'on entend par cette quantité. Il faut le mettre en évidence dans la copie. Le but de cette partie est de calculer x . Pour cela, il est nécessaire de faire un bilan enthalpique sur 2 systèmes entre C et D . le premier est la partie du fluide qui reste liquide entre ces deux états et l'autre est la partie du fluide qui se vaporise.

On appellera $\Delta h_{liq}(CD)$ la variation d'enthalpie entre C et D du système composé par la partie du fluide qui reste liquide entre C et D et $\Delta h_{vap}(CD)$ celle de la partie du fluide qui se vaporise durant cette transformation

Pour le liquide, on estime que la variation d'enthalpie est la variation d'énergie interne $\Delta u_{liq}(CD)$. D'après le premier principe, c'est donc la chaleur, Q_l , qu'échange la partie liquide avec l'extérieur, puisqu'il n'y a pas d'échange de travail avec l'extérieur pour le liquide (on fait l'hypothèse que le volume du liquide ne varie pas avec la température). Soit

$$\Delta h_{liq}(CD) = \Delta u_{liq}(CD) = Q_l$$

Or la définition du coefficient calorimétrique c_l est :

$$Q_l = c_l \Delta T$$

Il vient donc :

$$\boxed{\Delta h_{liq}(CD) = c_l(T_1 - T_2)}$$

IV.3. La relation de la question IV.1 peut se réécrire :

$$h_{liq}(T_2) - h_{liq}(T_1) = -xh_{liq}(T_1) + xh_{vap}(T_1) = x(h_{vap}(T_1) - h_{liq}(T_1))$$

On remarque que :

* $h_{vap}(T_1) - h_{liq}(T_1)$ n'est rien d'autre que la chaleur latente de vaporisation du fluide à la température T_1 .

* $h_{liq}(T_2) - h_{liq}(T_1)$ est l'opposé de la variation d'enthalpie de la partie liquide $\Delta h_{liq}(CD)$.

On a donc :

$$-\Delta h_{liq}(CD) = x \frac{L_v(T_1)}{M}$$

Or d'après la question précédente $\Delta h_{liq}(CD) = c_l(T_1 - T_2)$. Il vient donc au final :

$$x \frac{L_v(T_1)}{M} = -c_l(T_1 - T_2)$$

Donc la fraction x vérifie :

$$\boxed{x = -\frac{M c_l (T_1 - T_2)}{L_v(T_1)}}$$

IV.4. Application numérique :

$$x = -\frac{120.10^{-3}1,00.10^3(240 - 310)}{170.10^3} = 5.10^{-2} = 5\%$$

V. Fin de la vaporisation $D \rightarrow A$

V.1. La fraction $1-x$ de fluide finit de se vaporiser. Sa variation d'enthalpie n'est rien d'autre que de la chaleur latente de vaporisation à la température T_1 . La partie du fluide déjà vaporisée n'échange, elle, pas d'enthalpie.

$$\Delta h_{DA} = (1-x) \frac{L_V(T_1)}{M}$$

V.2. Application numérique :

$$\Delta h_{DA} = (1 - 5.10^{-2}) \frac{170.10^3}{120.10^{-3}} \sim 1346 \text{ kJ. kg}^{-1}$$

VI. Bilan énergétique du cycle

VI.1. La variation d'enthalpie du fluide sur un cycle doit être nulle. D'autre part, elle est égale à la somme des variations d'enthalpie sur chaque partie du cycle.

$$\Delta h_{AA} = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA} \equiv 0$$

Numériquement, d'après les questions II.3, III.3, IV.2 et le fait que $\Delta h_{CD} = 0$ (détente isenthalpique), on obtient :

$$\Delta h_{AA} = 46,5 - 1100.10^3 + 1346.10^3 \sim 292.10^3 \text{ kJ.}$$

Ce n'est vraiment pas satisfaisant. Cette erreur est de l'ordre de 15% de l'échange d'enthalpie le plus important (Δh_{DA}), et vaut trois fois plus que Δh_{AB} . On devrait trouver un écart plus petit que Δh_{AB} . On reviendra sur ce problème à la fin de la correction, car il implique **toutes** les applications numériques du problème.

VI.2. L'efficacité frigorifique se définit comme le rapport des valeurs absolues de la quantité d'énergie "utile" échangée lors de la transformation et de la quantité d'énergie "dépensée" nécessaire au fonctionnement de la machine. La machine étudiée ici est un réfrigérateur. L'énergie utile est ici Δh_{DA} , c'est l'énergie que récupère le fluide, sous forme de chaleur, au milieu environnant, permettant ainsi de le refroidir. L'énergie nécessaire au fonctionnement, celle que l'opérateur doit fournir au fluide, est le travail de compression, Δh_{AB} .

$$\varepsilon_{fr} = \left| \frac{\Delta h_{DA}}{\Delta h_{AB}} \right|$$

VI.3. Application numérique :

VI.3. 1.

$$\varepsilon_{fr} = \frac{1346}{46.5} \sim 29$$

VI.3. 2. D'après la définition de ε_{fr} , le travail w nécessaire à l'extraction d'une quantité de chaleur Q est pendant un laps de temps δt :

$$w = \frac{Q}{\varepsilon_{fr}}$$

Divisant cette équation par δt , on l'exprime en puissance. La puissance mécanique P_m est donc reliée à la puissance thermique P_t par le même rapport. Numériquement, il vient :

$$P_m = \frac{10^5}{29} \sim 3,45.10^3 \text{ W}$$

VI.3. 3. Un kilogramme de fluide permet d'échanger une quantité de travail w . Le rapport entre P_m et w donne donc la quantité de fluide par unité de temps nécessaire à l'échange d'énergie mécanique.

$$D_m = \frac{P_m}{w}$$

Application numérique :

$$D_m = \frac{10^5}{46,5 \cdot 10^3} = 2,15 \text{ kg s}^{-1}$$

Attention!! Comme on l'a vu lors du bilan enthalpique du cycle, les applications numériques ne sont pas satisfaisantes. D'où cela peut-il venir?

En fait, la mise en garde du début de la correction de cette partie concernant les unités des chaleurs latentes peut mettre la puce à l'oreille.

1) Si l'on regarde les données numériques de l'énoncé, on se rend compte que le rapport entre le coefficient c_l et $L_V(T_1)/M$ est plutôt élevé. En effet :

$$\frac{L_V(T_1)}{M c_l} = \frac{170 \cdot 10^3}{10^3 * 120 \cdot 10^{-3}} \sim 1,5 \cdot 10^3 \text{ K}^{-1}$$

Or pour la plupart des corps ce rapport est plutôt de l'ordre de quelques centaines K^{-1} .

2) On peut aussi remarquer qu'avec les données numériques de l'énoncé, la valeur de x_0 qui permet d'annuler le bilan enthalpique du cycle vérifie :

$$(1 - x_0) \frac{L_V(T_1)}{M} = -\Delta h_{AB} - \Delta h_{BC}$$

Numériquement, on trouve :

$$(1 - x_0) = 120 \cdot 10^{-3} \frac{(-46,5 \cdot 10^3 + 1,1 \cdot 10^6)}{170 \cdot 10^3} \sim 74,4\%$$

Soit $x_0 \sim 25,6\%$!! Cette valeur est 5 fois plus grande que celle que l'on a obtenu dans la question IV.

Or l'argument physique de nullité de la variation d'enthalpie sur l'ensemble du cycle est un argument incontournable. Si une équation doit être impérativement respectée dans ce problème c'est bien celle-ci.

3) Si l'on cherche les fréons frigorigènes utilisés couramment dans l'industrie, on trouve un gaz, dénommé Difluoro-dichloro-méthane de formule chimique CF_2Cl_2 , dont certaines caractéristiques physico-chimiques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Masse molaire } M &= 120,93 \text{ g mol}^{-1} \\ \text{Température d'ébullition à 1 bar : } T_e &= 243 \text{ K} \\ \text{Chaleur latente de vaporisation à } T_e &= 167 \text{ kJ kg}^{-1} \end{aligned}$$

(source : wikipedia)

On retrouve bien les caractéristiques numériques de l'énoncé sauf en ce qui concerne la chaleur latente de vaporisation qui est donnée par unité de masse pour la même valeur numérique!!

Il y a donc fort à parier qu'il y ait eu une erreur d'énoncé dans les valeurs numériques et que les valeurs numériques des chaleurs latentes soient en kJ kg^{-1} et non en kJ mol^{-1} .

Pour corriger cela numériquement, il suffit de reprendre les équations établies tout au long du problème et de remplacer les termes en L_V/M par L_V .

Faisant cela on trouve :

$$w = \Delta h_{AB} \sim 46,5 \text{ kJ kg}^{-1} \quad \Delta h_{BC} = -147,5 \text{ kJ kg}^{-1} \quad x \sim 0,41 \quad \Delta h_{DA} = 100 \text{ kJ kg}^{-1}$$

Le bilan enthalpique est alors :

$$\Delta h_{AA} = 46,5 + 100 - 147,5 = -1 \text{ kJ kg}^{-1}$$

Ce qui est largement plus satisfaisant !!

Les calculs suivants donnent :

$$\varepsilon_{fr} \sim 2,15 \quad P_m \sim 46,5 \text{ kW} \quad D_m = 1 \text{ kg s}^{-1}$$

Voilà comment une erreur minime de frappe (sûrement) peut déstabiliser complètement un candidat. Il est bien évident que durant le temps imparti de l'épreuve, il est presque impossible de remettre à plat toutes les applications numériques et de réaliser qu'il y a sûrement une erreur d'unités dans l'énoncé. Il s'agit donc de lire très attentivement ce dernier avant de commencer et de noter scrupuleusement tout ce qui peut sembler bizarre. Ainsi toutes les valeurs numériques sont données par unité de masse sauf les chaleurs latentes qui sont molaires. Dans un énoncé de physique, c'est typiquement le genre de chose qui doit être minutieusement contrôlé.

--- **FIN** ---