
UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE

CORRECTION DE L'ÉPREUVES DE PHYSIQUE II
AUX CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES DEUG DES ENSI
ANNÉE - 2003

Proposée par
GILLES MICOLAU

Maître de Conférences
UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE
Agrégé de l'Université

gilles.micolau@univ-cezanne.fr
IM2NP/Polytech - IMT, Bureau 503
Technopole de Château-Gombert, 13451 Marseille cedex 20
Tel : 04 91 05 47 77

CORRECTION DE L'ÉPREUVE PHYSIQUE II 2003

PARTIE A: ELECTRODYNAMIQUE

I. Régime transitoire dans une bobine

I.1. Aux bornes d'une bobine d'inductance L pure, la tension est proportionnelle à la dérivée temporelle du courant. Dans la convention d'Ohm récepteur, on a :

$$U = L \frac{di}{dt}$$

Si la bobine possède une résistance interne r , il convient de rajouter la différence de potentiel qu'elle génère par application de la loi d'Ohm.

$$U_{AC} = L \frac{di}{dt} + ri \quad (1)$$

I.2. Une fois l'interrupteur K fermé, la loi des mailles, en partant du point B donne :

$$U_{CB} + U_{AC} - E = 0 \text{ soit } U_{AC} + U_{CB} = E$$

La loi d'Ohm appliquée sur le brin CB , à la résistance R donne :

$$U_{CB} = Ri$$

Grâce à l'équation (1), il vient :

$$L \frac{di}{dt} + (R + r)i = E \quad (2)$$

I.3. Pour résoudre cette équation différentielle du premier ordre, linéaire, à coefficient constant et à second membre nul, on opère en trois temps :

1. Résolution de l'équation homogène associée (second membre nul).
2. Recherche d'une solution particulière de l'équation
3. Détermination des constantes éventuelles d'intégration

L'équation homogène associée est :

$$L \frac{di}{dt} + (R + r)i = 0 \text{ soit } \tau \frac{di}{dt} + i = 0$$

Cette équation a pour solution :

$$i(t) = A_0 \exp(-\tau t)$$

où A_0 est une constante que l'on déterminera plus tard.

Recherchons **une** solution particulière à l'équation (2). Une solution particulière simple peut être trouvée en cherchant une solution **constante**. Soit

$$\frac{di}{dt} = 0$$

Il vient alors

$$i = \frac{E}{R + r}$$

Cette expression est une solution particulière à l'équation (2). La forme de la solution générale est donc :

$$i(t) = A_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E}{R + r}$$

Déterminons la constante A_0 par les conditions initiales. La présence de la bobine impose la continuité du courant à l'instant $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur K . On a donc :

$$i(t = 0) = 0 = A_0 \exp(0) + \frac{E}{R + r} \implies A_0 = -\frac{E}{R + r}$$

Finalement, il vient

$$i(t) = \frac{E}{R+r} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (3)$$

I.4. Il vient alors pour la dérivée de i :

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{R+r} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E}{L} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

En utilisant cette expression dans la relation (1), il vient :

$$\begin{aligned} U_{AC} &= E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + r \frac{E}{R+r} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \\ &= E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[1 - \frac{r}{R+r} \right] + \frac{rE}{R+r} \\ &= \frac{RE}{R+r} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{rE}{R+r} \end{aligned}$$

I.5. La courbe 1 représente l'évolution du courant $i(t)$ dans le circuit en fonction du temps (à gauche) et l'évolution de la différence de potentiel U_{AC} en fonction du temps (à droite).

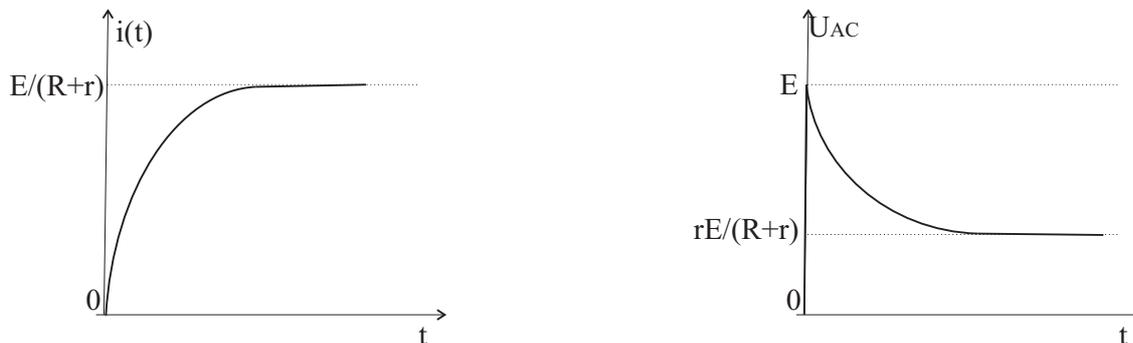


FIG. 1 – Evolution de i et u_{AC} en fonction du temps

Il convient de remarquer que, comme E , la différence de potentiel U_{AC} n'est pas continue en $t = 0$.

I.6. Puisque le temps $\tau \ll T/2$, on suppose que le temps d'établissement du régime stationnaire est petit devant la période du signal. C'est à dire qu'entre chaque bascule de la tension d'entrée e , le courant i ainsi que la tension U_{AC} vont avoir le temps de relaxer complètement et d'arriver à leur régime stationnaire. On va donc considérer deux cas de figure.

1. Passage de $e(t)$ de E à 0
2. Passage de $e(t)$ de 0 à E

Premier cas : Il a déjà été résolu puisque les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions I.1,...,I.5. Il suffit donc de tracer i et U_{AC} identiquement au graphe de la figure 1 sur la partie du créneau $e(t) = E$.

Deuxième cas : Il est possible ici d'utiliser deux raisonnements.

1. On résout l'équation différentielle que vérifie le courant avec pour condition initiale $i(t = 0) = E/(R+r)$, on en déduit la différence de potentiel U_{AC} par la loi des mailles avec $e = 0$. C'est formellement ce qui a été fait dans les questions I.1,...,I.5. C'est une méthode efficace qui permet d'avoir la forme analytique du courant et de U_{AC} . On peut donc ensuite les tracer sans grande difficulté. L'inconvénient c'est que c'est un peu long et que la question n'est pas de trouver la forme analytique pour U_{AC} et i mais bien de les tracer. On trouve :

$$i(t) = \frac{E}{R+r} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] \text{ et } U_{AC}(t) = -\frac{RE}{R+r} \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

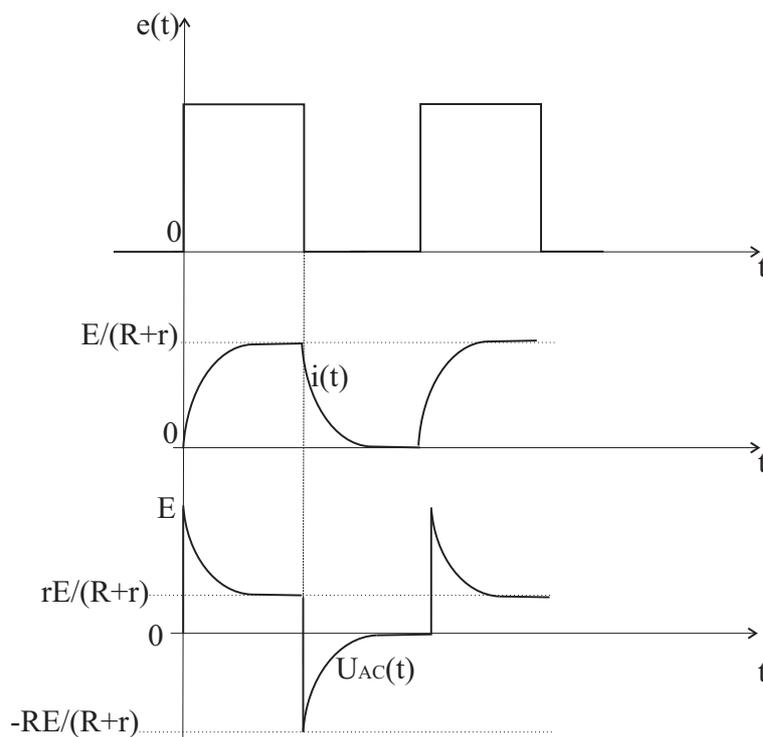


FIG. 2 – Evolution de i et u_{AC} en fonction du temps si la différence de potentiel e a une forme de créneau

2. Une façon qualitative de décrire le courant et la différence de potentiel est simplement de remarquer qu'une bobine associée à une résistance est un système dissipatif qui relaxe exponentiellement avec la constante de temps τ bien inférieure à la période du signal d'entrée. Le courant est continu. Donc lorsque la différence de potentiel e bascule à 0, le courant va décroître exponentiellement jusqu'à sa valeur d'équilibre qui est alors $i = 0$, en partant de la valeur qu'il a lorsque le régime permanent $e(t) = E$ est établi qui est $i = E/(R+r)$. U_{AC} n'est pas continue. Elle va donc relaxer exponentiellement vers sa valeur d'équilibre quand il n'y a plus de courant, soit 0, en partant de sa valeur d'équilibre quand $e = E$, soit $U_{AC} = -RE/(R+r)$ obtenue par la loi des mailles quand $e(t) = E$.

Les formes de $i(t)$ et $U_{AC}(t)$ sont schématisées sur la figure 2.

II. Circuit linéaire en régime sinusoïdal

II.1.

II.1. 1. L'impédance complexe d'une résistance pure R n'est rien d'autre que R . L'impédance complexe d'une inductance pure L est $jL\omega$. Le circuit proposé entre les deux points A et B est la mise en série de deux résistances r et R et d'une inductance L . L'impédance complexe du circuit est donc la somme des trois impédances complexes :

$$\underline{Z}_{AB}(j\omega) = (R+r) + jL\omega$$

II.1. 2. On peut observer un diviseur idéal de tension. Il vient donc immédiatement :

$$\underline{u}_s = \frac{R}{\underline{Z}_{AB}} \underline{u}_e$$

Soit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R+r+jL\omega} = \frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

II.2.

II.2. 1. Il vient immédiatement pour le module de la fonction de transfert \underline{H} :

$$|H|^2 = \frac{K^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Soit pour le gain $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \sqrt{|H|^2} = \left\{ \frac{K^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Le déphasage φ est l'argument du nombre complexe \underline{H} . Il vérifie donc :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})} = - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Soit :

$$\varphi(\omega) = - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

II.2. 2.

$$G(\text{dB}) = 20 \log \left(\left\{ \frac{K^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) = 10 \log \left(\frac{K^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) = 20 \log(K) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right)$$

Faisons une analyse asymptotique ($\omega \ll \omega_0$, $\omega \gg \omega_0$) et pour le point particulier $\omega = \omega_0$:

- $\omega \ll \omega_0$ alors ,

$$\omega/\omega_0 \rightarrow 0, \text{ soit } G(\text{dB}) \sim 20 \log K$$

Ce gain est le gain maximal, on pose donc : $G(\text{dB})_{\text{max}} = 20 \log K$

- $\omega \gg \omega_0$ alors :

$$\omega/\omega_0 \rightarrow +\infty, \text{ soit } G(\text{dB}) \sim -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) \sim -20 \log(\omega)$$

- $\omega = \omega_0$ alors :

$$G(\text{dB}) = 20 \log(K) - 10 \log 2 \sim G(\text{dB})_{\text{max}} - 3\text{dB}$$

car $\log 2 \sim 0,3$.

En remarquant que $K < 1$ et que son logarithme est négatif, on peut donc tracer l'allure de $G(\text{dB})$ comme sur la figure 3 (graphe de gauche).

II.2. 3. Pour tracer l'évolution de la phase, on peut aussi faire une analyse asymptotique et en un point particulier.

- $\omega/\omega_0 \ll 1$ soit alors $\varphi = - \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \sim 0$

- $\omega/\omega_0 \gg 1$ alors $\varphi = - \arctan \frac{\omega}{\omega_0} \sim -\frac{\pi}{2}$

- $\omega = \omega_0$ alors $\varphi = - \arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$

II.2. 4. Ce montage est tel que lorsque les fréquences d'entrée sont plus petites que ω_0 , le signal de sortie n'est pas déphasé et a son amplitude proportionnelle au signal d'entrée, la constante de proportionnalité étant indépendante de la fréquence. Au contraire, les signaux d'entrée dont les fréquences sont supérieures à ω_0 sont amenés en sortie, ou atténués, avec une pente de -20dB/décade en amplitude, et sont déphasés. Ce circuit est un **filtre** qui ne modifie pas les caractéristiques des signaux de fréquence inférieure à ω_0 et qui atténue les signaux de fréquence supérieure à ω_0 . On dit que c'est un **filtre passe-bas**.

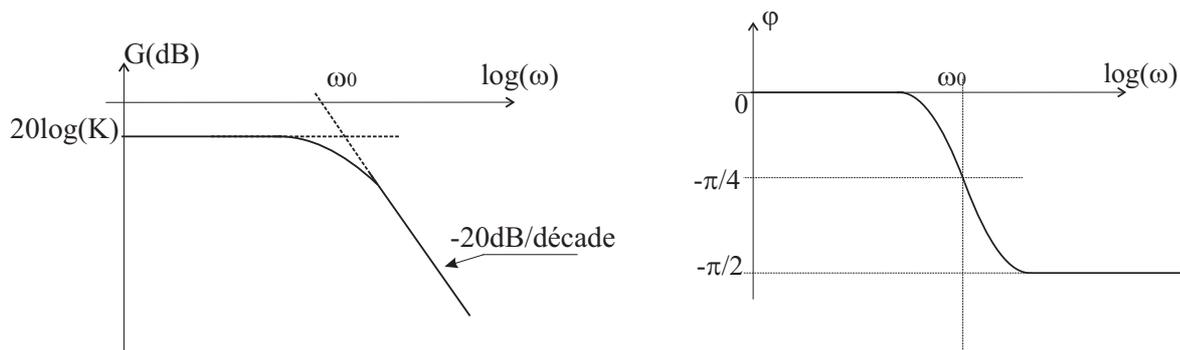


FIG. 3 – Diagramme de Bode

PARTIE B: ELECTROMAGNÉTISME

Dans les phénomènes d'induction, il existe classiquement deux grands types de problème : le premier est celui d'un conducteur mobile dans un champ constant et le second celui d'un conducteur fixe dans un champ variable dans le temps. Cet énoncé propose d'aborder ces deux aspects séparément (ce qui est classique).

I. Disque métallique en rotation dans un champ magnétique

Dans cette partie aucun champ électromagnétique ne dépend du temps.

I.1. Puisqu'on est en régime permanent stationnaire pour les champs :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

Puisque le champ B est constant et homogène dans la zone où il est non nul, l'équation (1) de l'énoncé devient donc plus "simple" dans la zone où le champ magnétique est non nul :

$$\vec{E}_m(M)_{/R} = \vec{v}_e(M)_{/R} \wedge \vec{B}_0$$

I.2.

I.2. 1. D'une façon générale, la vitesse est définie comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps, dans le référentiel choisi. Un point M de coordonnées r dans la base cylindrique définie dans l'énoncé, situé dans le plan du disque, a donc pour vitesse dans le référentiel R :

$$\vec{v}_e(M)_{/R} = \left(\frac{dr \vec{e}_r}{dt} \right)_{/R}$$

Afin de simplifier les notations, nous supprimerons l'indice "/ R " des quantités qui dépendent du référentiel, en nous plaçant dans le référentiel R de l'énoncé dans tout le reste de ce paragraphe.

On notera par un point au dessus de la quantité considérée sa dérivée par rapport au temps. Ainsi, de façon générale, la vitesse d'un point M dans le plan du disque sera :

$$\frac{dr \vec{e}_r}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Comme le point M appartient au disque qui ne se déforme pas $\dot{r} = 0$, il vient donc :

$$\vec{v}_e(M) = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

I.2. 2. Dans la partie où le champ magnétique est non nul, on a :

$$\vec{B}(M) = B_0 \vec{e}_z$$

Soit :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{v}_e(M) \wedge \vec{B}_0 = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \wedge B_0 \vec{e}_z = r \dot{\varphi} B_0 \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z$$

Puisque $\dot{\varphi} = \omega$ et $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$, il vient

$$\vec{E}_m(M) = r\omega B_0 \vec{e}_r$$

Cette relation est valable dans la partie où le champ magnétique est non nul. Ailleurs, le champ électrique induit est nul.

I.2. 3. Le champ électrique induit est radial. Il existe donc une différence de potentiel entre le centre du disque et les points du disque non centraux situés dans la partie où le champ magnétique est non nul. Le champ électromoteur est schématisé sur la figure 4 dans le cas où B_0 est positif.

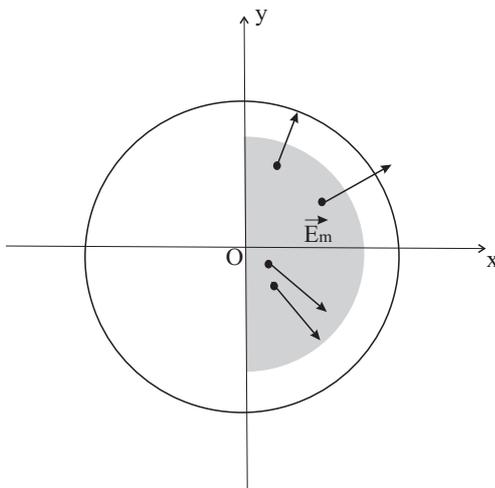


FIG. 4 – Champ électromoteur

I.2. 4. La loi d'Ohm locale est la relation linéaire entre $\vec{j}_i(M)$ et $\vec{E}_m(M)$. Il vient, dans la partie où le champ magnétique est non nul :

$$\vec{j}_i(M) = \gamma \vec{E}_m(M) = \gamma r\omega B_0 \vec{e}_r$$

Donc dans cette zone, la densité de courant est radiale.

I.2. 5.

Le courant de conduction n'a pas d'existence dans tout le disque mais seulement dans la zone où règne le champ magnétique. D'autre part, au cours du temps, ce sont des zones différentes du disque qui sont sujettes au champ magnétique puisque le disque tourne. Ce n'est pas la même partie du disque qui est exposée au champ magnétique au cours du temps. De fait les électrons qui voient un champ électrique \vec{E}_m dans la zone où règne le champ, vont avoir tendance à suivre ce champ et créer un courant de conduction radial, mais juste dans cette zone. Cependant, en même temps, ils suivent le mouvement du disque et finissent donc par sortir de la zone de champ magnétique. Leur mouvement relaxe alors vers l'équilibre thermique à l'intérieur du disque. Or on sait que la thermalisation électronique dans un conducteur est généralement un phénomène dont le temps caractéristique est très court devant les temps caractéristiques des signaux électriques. On peut donc faire l'hypothèse que dès que les électrons sortent de la zone de champ, ils se mettent immédiatement à l'équilibre thermique. De fait, la partie du disque non immergée se comporte comme un réservoir d'électrons de conduction. Il y a toujours assez d'électrons libres dans le disque pour assurer le courant de conduction dans la zone de champ magnétique.

L'ensemble du disque se comporte donc comme un circuit fermé à l'égard du champ électromoteur.

I.2. 6. Sur la figure 5 est présentée schématiquement la trajectoire possible d'un électron du disque conducteur.

Le courant des électrons est opposé (dans la convention habituelle) au courant de conduction. Lorsqu'un électron est dans la zone de champ magnétique (a), il est dévié par le champ électrique \vec{E}_m vers le centre O du disque. Une fois sorti de cette zone, il relaxe vers l'état d'équilibre thermique du disque (b), tout en étant entraîné par le

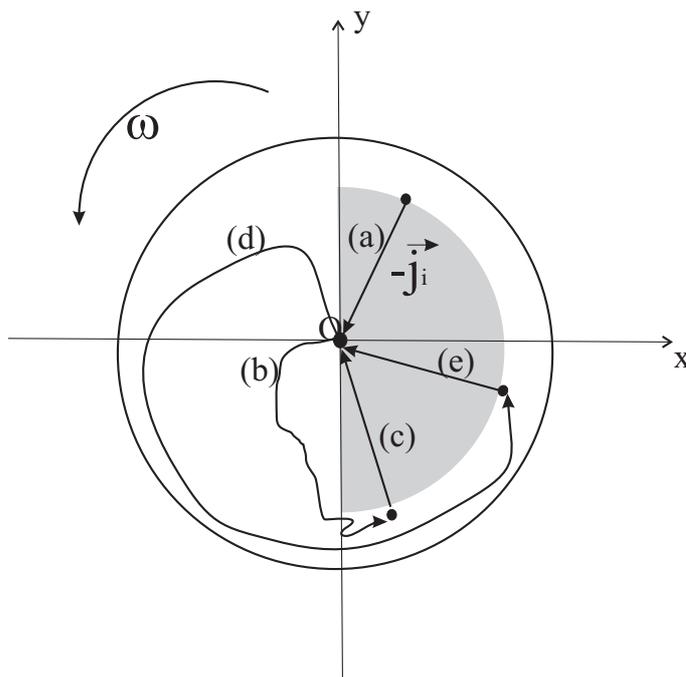


FIG. 5 – Schéma d'une "trajectoire d'électron"

mouvement de rotation du disque. Arrivé à nouveau vers la zone de champ magnétique, il peut être "aspiré" par le mouvement des électrons (c), qui sont dans la zone de champ magnétique et qui donc vont vers le centre O. La conservation locale de la charge électrique implique que les électrons au voisinage immédiat du demi-cercle dans lequel règne le champ magnétique sont attirés vers la zone. Une fois l'électron revenu dans la zone de champ magnétique, il recommence un "tour" (d,e).

I.3. La densité volumique de puissance est donnée par la produit scalaire :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}_i \cdot \vec{E}_m = \gamma \vec{E}_m^2$$

C'est une puissance dissipée par effet Joule : les électrons "résistent" à leur mise en mouvement par le champ électrique. Il y a de la friction dans le matériau, ce qui produit un dégagement de chaleur. Cette puissance est dissipée sous forme calorifique.

I.3. 1. Grâce à l'expression du champ électromoteur, il vient immédiatement :

$$\frac{dP}{d\tau} = \gamma \vec{E}_m^2 = r^2 \omega^2 B_0^2$$

I.3. 2. La puissance totale est donc l'intégrale de cette densité volumique de puissance sur le volume V_c du conducteur circulaire où règne le champ magnétique :

$$P_I = \iiint_{V_f} \frac{dP}{d\tau} d\tau = \iiint_{V_f} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2 d\tau$$

L'élément différentiel de volume en coordonnées cylindriques est :

$$d\tau = dr r d\varphi dz$$

Donc :

$$P_I = \iiint_{V_f} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2 dr r d\varphi dz = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\varphi=-\pi/2}^{z=+\pi/2} \int_{r=0}^{r=R} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2 dr r d\varphi dz$$

Comme les intégrales sur les différentes variables indépendants sont décorrélées, on peut écrire :

$$P_I = \int_{z=0}^{z=h} dz \int_{\varphi=-\pi/2}^{z=+\pi/2} d\varphi \int_{r=0}^{r=R} \gamma r^2 \omega^2 B_0^2 dr = h\pi\omega^2 B_0^2 \int_{r=0}^{r=R} r^3 dr = \gamma h\pi\omega^2 B_0^2 \frac{R^4}{4}$$

Soit :

$$P_I = \frac{\pi}{4} \gamma \omega^2 B_0^2 h R^4$$

I.3. 3. Supposons que le disque tourne sans frottements, juste entraîné par son inertie à la vitesse ω . La présence du champ magnétique implique que le disque va dissiper la puissance P_I , soit une énergie E_I par unité de temps. Cette énergie ne peut être dissipée que si le disque est en mouvement. Elle est donc liée à l'énergie cinétique de rotation du disque. L'énergie E_I dissipée par unité de temps est donc "prise" sur l'énergie cinétique de rotation du disque, qui, elle, décroît. La vitesse du disque diminue donc. **Ce dispositif freine le disque.** Pour continuer à le mettre en mouvement, il faut donc fournir au disque l'énergie dissipée par effet Joule. Il faut donc relier le disque à un moteur pour que celui ci continue à tourner.

I.3. 4. Application pratique : Une utilisation courante de ce genre de dispositifs est ce que l'on nomme le freinage par courants de Foucault (ce sont les courants induits dans le disque). Ces systèmes équipent les dispositifs en rotation qu'il faut régulièrement freiner, sans forcément les arrêter. L'intérêt de ce type de freinage est qu'il s'effectue sans contact mécanique, de fait l'élévation de température que l'on observe dans les matériaux n'a pas d'impact immédiat sur la qualité du freinage comme c'est le cas sur des freins mécaniques. C'est un système qui équipe les poids lourds ainsi que les autocars.

I.3. 5. Application numérique

$$P_I = \frac{\pi}{4} 5 \cdot 8 \cdot 10^7 (10^3)^2 (10^{-2})^2 5 \cdot 10^{-3} (10^{-1})^4 \sim 2280 \text{ W} = 2,28 \text{ kW}$$

II. Matériau conducteur soumis à un champ magnétique variable

II.1. La relation donnant le champ magnétique en un point situé sur l'axe de la spire, issue de la loi générale de Biot et Savart est rappelée dans l'énoncé. Afin de déterminer le champ magnétique généré par un solénoïde infini, nous allons procéder en trois étapes :

1. On calcule le champ magnétique créé par une spire d'épaisseur élémentaire dL appartenant au solénoïde, grâce à la relation de l'énoncé.
2. On intègre sur la totalité des spires (sur la longueur du solénoïde). Cette intégration se fait sur une variable géométrique pertinente.
3. On fait tendre la longueur du solénoïde vers l'infini.

Calculons donc d'abord le champ créé par un solénoïde de longueur L , au point O .

On considère un solénoïde de longueur L . Du point O situé sur l'axe du cylindre, les bords du solénoïde sont vus sous les angles α_1 et α_2 , comme indiqué sur la figure 6.

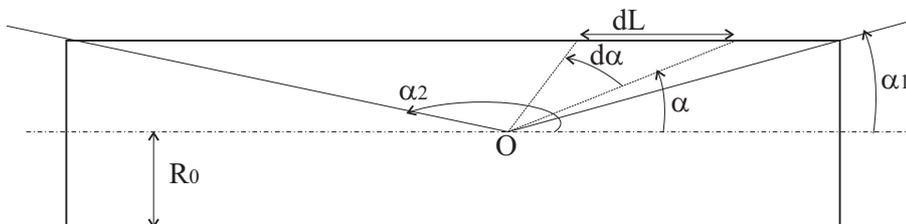


FIG. 6 – Solénoïde de longueur L .

On repère une spire élémentaire du solénoïde par l'angle α . L'épaisseur élémentaire de cette spire est se détermine en différentiant la relation qui donne L :

$$\tan \alpha = \frac{R_0}{L} \Rightarrow dL = \frac{R_0}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

La spire élémentaire est parcourue par un courant total $n i dL$.

Le champ magnétique $d\vec{B}$ créé au point O par cette spire est donc, d'après la relation de l'énoncé :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{2R_0} n i dL \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2} n i \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z$$

Au point O , le champ magnétique créé par le solénoïde de la figure 6 est donc :

$$\vec{B}(O) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\vec{B}(O) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0}{2} n i \sin \alpha d\alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2} n i (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

Pour un solénoïde infiniment long, il faut faire tendre maintenant α_1 vers 0 et α_2 vers π . Soit :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{2} n i (\cos 0 - \cos \pi) \vec{e}_z = \mu_0 n i \vec{e}_z$$

II.2. On admet donc la forme du potentiel vecteur :

$$\vec{A} = A(\rho, t) \vec{e}_\varphi$$

La relation intégrale donnée par l'énoncé entre \vec{A} et \vec{B} , qui est l'équivalent du théorème d'Ampère entre le potentiel vecteur et le champ magnétique permet d'exprimer \vec{A} en fonction des données du problème. On **choisit** pour contour d'intégration le cercle de rayon ρ centré sur l'axe. Son élément différentiel de longueur $d\vec{l}$ s'exprime en fonction de φ :

$$d\vec{l} = \rho d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Il vient donc :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} A(\rho, t) \rho d\varphi \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = A(\rho, t) \rho \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = 2\pi A(\rho, t) \rho \quad (4)$$

La surface la plus simple s'appuyant sur le contour est le disque centré sur l'axe z et de rayon ρ . Sa surface totale est $\pi\rho^2$. Son élément différentiel de surface est parallèle à l'axe z , soit $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$. Comme on admet que le champ magnétique est uniforme, il vient :

$$\iint_S \vec{B} dS \vec{e}_z = \iint_S B_m \sin \omega t dS \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = B_m \pi \rho^2 \sin \omega t \quad (5)$$

L'égalité entre la circulation du vecteur \vec{A} et le champ \vec{B} est donné par l'équation. Les deux relations (4) et (5) sont égales. Il vient donc :

$$B_m \pi \rho^2 \sin \omega t = 2\pi A(\rho, t) \rho$$

Soit :

$$A(\rho, t) = \frac{B_m}{2} \rho \sin \omega t$$

II.3. II.3. 1. Dans l'équation (1) de l'énoncé ne reste plus que la partie temporelle. Le terme de mouvement du conducteur a disparu :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \omega \frac{B_m}{2} \rho \cos \omega t \vec{e}_\varphi$$

II.3. 2. Attention à ce que demande l'énoncé. D'après les notations utilisées depuis le début, ce n'est pas la norme (quantité positive) qui est demandée mais l'amplitude (qui est une quantité algébrique). L'amplitude E_m de ce vecteur est donc :

$$E_m = \omega \frac{B_m}{2} \rho \cos \omega t \text{ et sa norme } |E_m| = \omega \frac{|B_m|}{2} \rho |\cos \omega t|$$

II.3. 3. On trace donc les lignes de courant de façon orthoradiale, comme indiqué sur la figure 7 :

II.3. 4. Ce type de courants basse fréquence induits dans le cœur même des métaux conducteurs se nomment **Courants de Foucault**.

II.4.

II.4. 1. Cette puissance est dissipée par effet Joule. Elle est dissipée sous forme de **chaleur**. Les électrons mis en

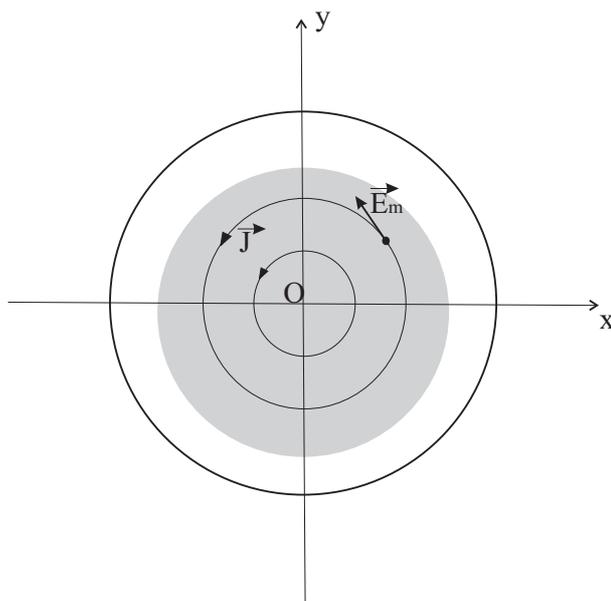


FIG. 7 – Lignes de courant schématiques

mouvement dans le barreau de cuivre frictionne avec le réseau cristallin.

II.4. 2. La puissance volumique instantanée est d'après l'expression de E_m :

$$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \gamma E_m^2 = \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{4} \rho^2 \cos^2 \omega t}$$

II.4. 3. La puissance moyenne dissipée est la moyenne sur une période de la puissance volumique, soit :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{t=T} \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{4} \rho^2 \cos^2 \omega t dt$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période du signal. Il vient donc :

$$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \frac{\omega}{2\pi} \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{4} \rho^2 \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t dt = \gamma \omega^3 \frac{B_m^2}{8\pi} \rho^2 \int_{t=0}^{t=\frac{2\pi}{\omega}} \frac{(\cos(2\omega t) + 1)}{2} dt = \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{8} \rho^2$$

$$\boxed{\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{8} \rho^2}$$

II.4. 4. La puissance moyenne P_{II} totale est l'intégrale de cette puissance volumique sur l'ensemble du volume conducteur. Ce volume est un cylindre de hauteur H et de rayon R . Son élément différentiel de volume $d\tau$ est donc :

$$d\tau = dz \rho d\varphi d\rho$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{II} &= \int_{z=0}^{z=H} \int_{\varphi=0}^{z=2\pi} \int_{\rho=0}^R \left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle d\tau = \int_{z=0}^{z=H} \int_{\varphi=0}^{z=2\pi} \int_{\rho=0}^R \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{8} \rho^2 dz \rho d\varphi d\rho \\ &= 2\pi H \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{8} \int_{\rho=0}^R \rho^3 d\rho \\ &= \pi H \gamma \omega^2 \frac{B_m^2}{16} R^4 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P_{II} = \frac{\pi}{16} \gamma B_m^2 \omega^2 H R^4}$$

II.4. 5. Une application courante est le four ou chauffage à induction que l'on utilise notamment en métallurgie du Silicium. Dans les systèmes de transformateurs, au contraire, on évite d'avoir de tel courants pour ne pas

gaspiller d'énergie. On feuillette alors les barreaux de façon à couper le lignes de courant.

II.4. 6. Application numérique

$$P_{II} = \frac{\pi}{16} 5,8 \cdot 10^7 (2 \cdot 10^{-4})^2 (5 \cdot 10^4)^2 0,2 (5 \cdot 10^{-2})^4 \sim 1424 \text{ W}$$

C'est l'ordre de grandeur d'un chauffage électrique par convection domestique

— **FIN** —