
UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE

CORRECTION DES ÉPREUVES DE PHYSIQUE I
AUX CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES DEUG DES ENSI
ANNÉES 2003-2004-2005-2006-2007-2008-2009-2010-2011

Proposées par
GILLES MICOLAU

Maître de Conférences
UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE
Agrégé de l'Université

gilles.micolau@univ-cezanne.fr
IM2NP/Polytech - IMT, Bureau 503
Technopole de Château-Gombert, 13451 Marseille cedex 20
Tel : 04 91 05 47 77

Document mis à disposition des bibliothèques universitaires de l'Université, mis à jour et téléchargeable sur :
<http://www.gilles-micolau.univ-cezanne.fr>

Les énoncés sont disponibles sur le site du concours commun CCP Ensi-Deug :
http://sccp.inp-toulouse.fr/html/deug/sujet/sujet_accueil_deug.htm

Table des matières

2003	5
2004	23
2005	33
2006	49
2007	67
2008	83
2009	93
2010	107
2011	121

Epreuve de 2003

A THERMODYNAMIQUE

I. Transferts de chaleur

I.1. La glace subit deux transformations successives. Durant la transformation τ_1 , elle passe de la température T_1 à la température de fonte T_0 . Puis durant la transformation τ_2 , elle fond à température constante T_0 . On a donc pour la transformation totale τ_t , la variation d'enthalpie :

$$\Delta H_{\tau_t}(M_S) = \Delta H_{\tau_1}(M_S) + \Delta H_{\tau_2}(M_S)$$

Par définition de la chaleur latente massique de la glace :

$$L_f = \frac{\Delta H_{\tau_2}}{M_S} \text{ soit } \Delta H_{\tau_2} = L_f M_S$$

Et puisqu'on est à pression constante :

$$\Delta H_{\tau_1}(M_S) = M_S C_{pS} (T_0 - T_1)$$

Il vient donc :

$$\boxed{\Delta H_{\tau_t}(M_S) = M_S (C_{pS} (T_0 - T_1) + L_f)}$$

Application Numérique : $\Delta H_{\tau_t}(M_S) = 1 \times (2,09 \cdot 10^3 (273 - 253) + 334 \cdot 10^3) \sim 376 \text{ kJ}$

I.2. Supposons que toute la glace fonde. On attend ensuite l'équilibre thermique. La température de la glace fondue et de l'eau sera alors T_f . Deux systèmes thermodynamiques sont en présence : l'eau initialement dans le calorimètre, Σ_L , et la glace qui se transforme en eau liquide, Σ_S . La figure 2003.1 schématise les transformations subies par les deux systèmes. Σ_L change de température (T_2 à T_f). Σ_S subit un ensemble de trois transformations notées a, b, c. a est la

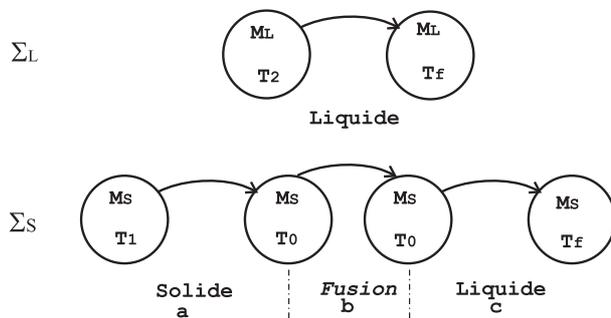


FIG. 2003.1 – Fonte de glace dans l'eau

modification de la température de la glace solide (T_1 à T_0)—comme à la question précédente—, b est le changement de phase à température T_0 constante et c est la modification de température de la glace fondue (T_0 à T_f).

L'ensemble eau-glace est isolé. H étant une fonction d'état, elle est **extensive**, soit sur l'ensemble de la transformation :

$$\Delta H(\Sigma_L + \Sigma_S) = \Delta H(\Sigma_L) + \Delta H(\Sigma_S) = 0$$

D'autre part, puisque la transformation s'opère à pression constante :

$$\begin{aligned} \Delta H(\Sigma_L) &= M_L C_{pL} (T_f - T_2) \\ \Delta H(\Sigma_S) &= \underbrace{M_S C_{pS} (T_0 - T_1)}_a + \underbrace{M_S L_f}_b + \underbrace{M_S C_{pL} (T_f - T_0)}_c \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$M_L C_{pL} (T_f - T_2) + M_S C_{pS} (T_0 - T_1) + M_S L_f + M_S C_{pL} (T_f - T_0) = 0$$

Pour que la transformation ait lieu complètement, il faut que la température finale soit supérieure au moins à la température de solidification, soit $T_f \geq T_0$. T_{2min} est donc la température pour laquelle : $T_f - T_0 = 0$ soit :

$$T_{2min} - T_0 = \frac{1}{M_L C_{pL}} (M_S L_f + M_S C_{pS} (T_0 - T_1))$$

Application numérique :

$$T_{2min} - T_0 = \frac{334 \cdot 10^3}{4,18 \cdot 10^3} + \frac{2,09 \cdot 10^3}{4,18 \cdot 10^3} (273 - 253) \sim 90 \text{ K}$$

Donc

$$T_{2min} \sim 363 \text{ K} = 90 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Remarque : Il faut donc utiliser pratiquement de l'eau bouillante pour faire fondre toute la glace. On peut d'ailleurs remarquer que l'énergie mise en jeu dans le changement de phase (transformation b) est de loin la plus importante pour la glace. On dirait dans un langage quotidien qu'il faut "beaucoup d'énergie" pour faire fondre de la glace.

II. Cessation d'un état métastable

II.1. La solidification est partielle. A la fin de l'expérience on a donc un état stable à l'équilibre où coexistent de la glace et de l'eau liquide. La température d'équilibre est donc la température de changement d'état eau-glace à l'équilibre. Soit

$$T_f = T_0$$

II.2. On considère deux systèmes : Σ_g de masse m_S qui est l'eau qui se solidifie et Σ_0 de masse $(M_L - m_S)$ qui est l'eau restant sous forme liquide. Le système $\Sigma_g + \Sigma_0$ est isolé. **Par extensivité** de l'enthalpie il vient :

$$\Delta H(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta H(\Sigma_g) + \Delta H(\Sigma_0) = 0$$

Pour évaluer les deux variations d'enthalpie des deux systèmes, on imagine une transformation, notée τ_i qui emmène les deux systèmes de l'état initial T_3 liquide à l'état final $T_f = T_0$ où coexistent glace et eau. Cette transformation imaginaire

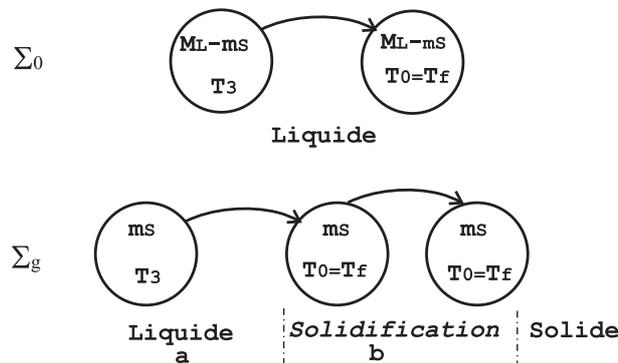


FIG. 2003.2 – Schéma de la transformation τ_i quasi statique

est considérée comme **quasi-statique**. Elle est schématisée sur la figure 2003.2. La variation d'enthalpie de chacun des deux systèmes sur la transformation τ_i est la même que pour la transformation réelle car l'enthalpie est une fonction d'état qui ne dépend que des états final et initial. On a donc :

$$\Delta H(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta H_{\tau_i}(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta H_{\tau_i}(\Sigma_g) + \Delta H_{\tau_i}(\Sigma_0) = 0$$

et

$$\begin{cases} \frac{\Delta H(\Sigma_0)}{\tau_i} = (M_L - m_S)C_{pL}(T_0 - T_3) \\ \frac{\Delta H(\Sigma_g)}{\tau_i} = m_S C_{pL}(T_0 - T_3) - m_S L_f \end{cases}$$

Soit en additionnant ces deux égalités :

$$M_L C_{pL}(T_0 - T_3) - m_S L_f = 0$$

Alors :

$$m_S = \frac{M_L C_{pL}(T_0 - T_3)}{L_f}$$

II.3. REMARQUE IMPORTANTE : L'énoncé est ici ambigu. S'agit-il de l'eau restant liquide ou de tout le système ? C'est pourquoi dans les exercices de Thermodynamique il est primordial de soigneusement expliciter les systèmes que l'on étudie. Cela permet de rendre les réponses claires si l'énoncé ne l'est pas.

On propose ici un bilan entropique complet. Pour cela on donne un énoncé du second principe :

* _____ *

A tout système, on peut associer une fonction d'état appelée entropie, notée S . Pour toute transformation, cette fonction peut varier par 2 processus qui peuvent être concomittents :

1. échange avec l'extérieur
2. création interne liée aux caractère irréversible de la transformation.

Pour toute transformation, on peut donc écrire :

$$\Delta S = \Delta S_e + \Delta S_i$$

où ΔS_e est l'entropie échangée avec l'extérieur et ΔS_i est l'entropie créée de façon interne par les processus causant l'irréversibilité de la transformation.

Pour une transformation irréversible ΔS_i est strictement positive. Pour une transformation réversible, ΔS_i est nulle. On a donc :

$$\Delta S_i \geq 0$$

Si l'on considère une transformation infinitésimale, on a donc :

$$dS = dS_e + dS_i ; \text{ avec } dS_i \geq 0$$

Dans le cas d'une transformation réversible – et uniquement dans ce cas là – la température du système est définie en tout point de la transformation. On la note T . Alors la variation infinitésimale d'entropie "interne" est nulle :

$$dS_i = 0$$

et la variation d'entropie infinitésimale est donnée par :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

soit sur l'ensemble de la transformation :

$$\Delta S = \int_{\text{transformation}} \frac{\delta Q}{T}$$

* _____ *

Appliquons ce principe à chacun des systèmes définis sur **la transformation quasi-statique** τ_i . Il vient :

– Pour Σ_0

$$\Delta S_{\tau_i}(\Sigma_0) = \Delta S_e(\Sigma_0) + \Delta S_i(\Sigma_0)$$

Comme τ_i est quasi-statique, $\Delta S_i(\Sigma_0) = 0$.

D'autre part, il vient :

$$\Delta S_e(\Sigma_0) = \int_{\tau_i} \frac{\delta Q}{T}$$

où T est la température de Σ_0 pendant la transformation et δQ la chaleur élémentaire qu'il échange avec son extérieur.

Par définition de la capacité calorifique, on a, pour une variation élémentaire de température dT :

$$\delta Q = (M_L - m_S)C_{pL}dT$$

Il vient donc :

$$\Delta S_e(\Sigma_0) = \int_{\tau_i} (M_L - m_S)C_{pL} \frac{dT}{T} = \int_{T_3}^{T_0} (M_L - m_S)C_{pL} \frac{dT}{T} = (M_L - m_S)C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right)$$

– Pour Σ_g

$$\Delta S(\Sigma_g) = \Delta S_e(\Sigma_g) + \Delta S_i(\Sigma_g)$$

Par le même argument que pour Σ_0 :

$$\Delta S_i(\Sigma_g) = 0$$

On a alors :

$$\Delta S_e(\Sigma_g) = \int_{\tau_i} \frac{\delta Q}{T}$$

La transformation τ_i se décompose en 2 transformations quasi statiques successives a et b comme indiquées sur la figure 2003.2.

– Sur a (changement de température de T_3 à T_0)

$$\delta Q = m_S C_{pL} dT$$

Soit par la même intégrale que précédemment :

$$\Delta S_e(\Sigma_g) = m_S C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right)$$

– Sur b (changement de phase à température constante T_0), $Q_b = \int \delta Q = -m_S L_f$, soit :

$$\Delta S_e(\Sigma_g) = -\frac{m_S L_f}{T_0}$$

Il vient alors :

$$\Delta S_e(\Sigma_g) = \Delta S_e(\Sigma_g) + \Delta S_e(\Sigma_g) = m_S C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) - \frac{m_S L_f}{T_0}$$

L'entropie étant une fonction d'état, elle est extensive soit :

$$\begin{aligned} \Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) &= \Delta S(\Sigma_g) + \Delta S(\Sigma_0) \\ &= \Delta S_e(\Sigma_g) + \underbrace{\Delta S_i(\Sigma_g)}_0 + \Delta S_e(\Sigma_0) + \underbrace{\Delta S_i(\Sigma_0)}_0 \\ &= m_S C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) - \frac{m_S L_f}{T_0} + (M_L - m_S)C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) \\ &= M_L C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) - \frac{m_S L_f}{T_0} \end{aligned}$$

La variation d'entropie ne dépend que des états final et initial, il vient donc pour la variation d'entropie $\Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0)$ de toute l'eau initialement dans le calorimètre :

$$\Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) = M_L C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) - \frac{m_S L_f}{T_0}$$

En appliquant le second principe au système $(\Sigma_g + \Sigma_0)$, on écrit donc pour la transformation réelle :

$$\Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta S_e(\Sigma_g + \Sigma_0) + \Delta S_i(\Sigma_g + \Sigma_0)$$

Or $(\Sigma_g + \Sigma_0)$ est un système isolé (voir la question II.2). Donc

$$\Delta S_e(\Sigma_g + \Sigma_0) = 0$$

Il vient donc :

$$\Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) = \Delta S_i(\Sigma_g + \Sigma_0) \geq 0$$

La variation d'entropie sur la transformation imaginaire τ_i est donc la variation d'entropie **créée** dans le système total par un processus irréversible lorsqu'il existe.

La transformation réelle est telle que le point $(T_3 < T_0)$ de départ est une situation **hors équilibre**. De fait, la transformation réelle **ne peut pas être** quasi-statique. Donc :

$$\Delta S_i(\Sigma_g + \Sigma_0) > 0$$

Puisqu'on a l'expression de $\Delta S_i(\Sigma_g + \Sigma_0)$ en fonction des données de l'expérience, il vient :

$$M_L C_{pL} \ln \left(\frac{T_0}{T_3} \right) - \frac{m_S L_f}{T_0} > 0$$

Résultat que l'on va retrouver numériquement.

Remarques et conseils du correcteur sur cette question

1. On remarquera la méticulosité avec laquelle il convient d'appliquer le second principe. On peut voir en effet que

$$\begin{aligned} \Delta S_i(\Sigma_g + \Sigma_0) &\neq \Delta S_i(\Sigma_g) + \Delta S_i(\Sigma_0) \\ \Delta S_e(\Sigma_g + \Sigma_0) &\neq \Delta S_e(\Sigma_g) + \Delta S_e(\Sigma_0) \end{aligned}$$

C'est l'entropie qui est une fonction d'état. A priori l'entropie créée par irréversibilité, ni l'entropie échangée ne sont des fonctions d'état. Il faut donc appliquer cette notion sur la variation globale d'entropie et utiliser ensuite les propriétés de la transformation.

2. Cette question est étonnante dans sa formulation. En effet, les questions précédentes sont des applications assez directes du premier principe et de la calorimétrie. Celle-ci au contraire demande de parfaitement utiliser toutes les propriétés de l'entropie. Dans le contexte d'un concours c'est le genre de question qui peut rapporter beaucoup de points (peu d'étudiants arriveraient au bout de la question sans écrire une énormité). La contrepartie c'est qu'on peut y passer beaucoup de temps pour rien. C'est donc une question à savoir repérer comme "dangereuse".

II.4. Application numérique

II.4. 1. La relation obtenue en II.2 donne :

$$m_S = \frac{1.4, 18.10^3(273 - 263)}{334.10^3} \sim 0, 125 \text{ kg}$$

II.4. 2. La relation obtenue en II.3 donne :

$$\Delta S(\Sigma_g + \Sigma_0) = 1.4, 18. \ln \left(\frac{273}{263} \right) - \frac{0, 125.334.10^3}{273} = 3 \text{ J/ K}$$

II.4. 3. Comme annoncé à la question II.3, on trouve bien une variation d'entropie positive. La transformation ne peut pas être réversible puisque le point de départ est un état déjà hors équilibre. L'univers a donc vu son entropie augmenter. On peut remarquer que pour le système Σ_g , la variation d'entropie $\Delta S(\Sigma_g) = \Delta S_e(\Sigma_g)$ est négative. C'est tout à fait naturel puisque l'entropie est une "mesure" du désordre. Lors d'une cristallisation, l'ordre du système augmente.

POUR ALLER PLUS LOIN

Pour finir cette question, on peut tracer sur un même graphe la variation de m_S en fonction de T_3 ainsi que la variation de m_S^{\max} qui est la masse maximale qui peut être cristallisée en vertu du second principe : il faut que

$$M_L C_{pL} \ln\left(\frac{T_0}{T_3}\right) - \frac{m_S L_f}{T_0} > 0$$

Soit la limite pour m_S^{\max} :

$$m_S^{\max} = \frac{M_L C_{pL} T_0}{L_f} \ln\left(\frac{T_0}{T_3}\right)$$

Sur la figure 2003.3, sont représentées les deux quantités m_S et m_S^{\max} en fonction de T_3 , avec les données numériques

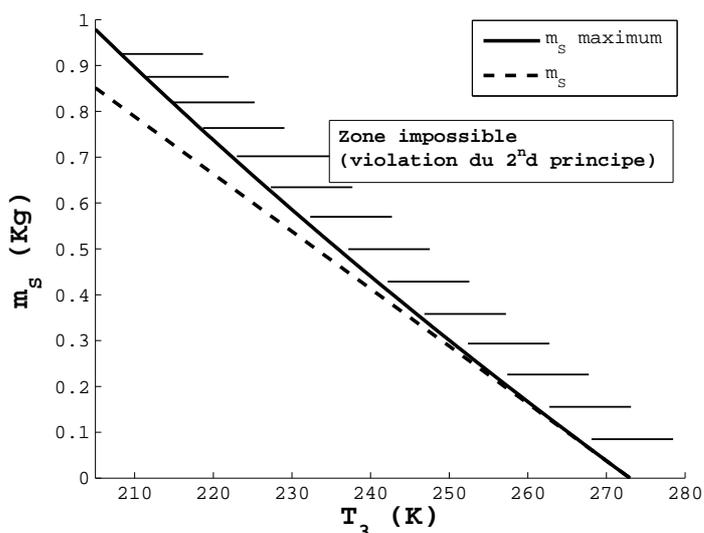


FIG. 2003.3 – Variations de m_S en fonction de T_3

de l'énoncé. Au dessus de la courbe pleine, le second principe est violé. La zone est impossible. On peut remarquer que les courbes ne se croisent jamais et que m_S reste toujours en dessous de la zone impossible. Les deux courbes se coupent lorsque $T_3 = T_0$. Dans ce cas, il n'y a plus de transformation.

Dans cette transformation, on est au cœur du second principe et de la nuance entre transformation réversible et quasi-statique. La transformation réelle est fondamentalement irréversible. L'état initial du système global est hors équilibre puisque sont en présence deux systèmes Σ_0 et Σ_g qui sont à température différente. **Il ne peut donc pas exister de température du système global.** Le système global va donc tendre vers l'équilibre. La transformation dans son ensemble ne peut pas être réversible puisque l'état de départ est complètement hors équilibre. Par contre, pour chacun des deux systèmes, on peut parfaitement concevoir que la transformation se fasse de façon quasi-statique (la glace se réchauffe tout doucement, et l'eau se refroidit tout doucement) ; mais la combinaison des deux transformations reste fondamentalement irréversible. C'est donc bien le système considéré qui fixe la propriété de la transformation, d'où la nécessité impérieuse de bien le définir en début de rédaction.

III. Diagramme $P = f(T)$ du corps pur

III.1. L'allure d'un diagramme de phase P, T pour un corps pur est schématisée sur la figure 2003.4. Les courbes tracées sont les zones de coexistence des différentes phases. **Il faut remarquer que pour l'eau, la courbe de fusion est décroissante.** Ce corps pur est une exception en ce qui concerne son diagramme de changement de phase. En effet, la masse volumique de l'état solide de l'eau est plus faible que celle de l'état liquide.

III.2.

III.2. 1. Application numérique : La relation de Clapeyron donne justement la quantité $\frac{dP}{dT}$ sur la courbe d'équilibre

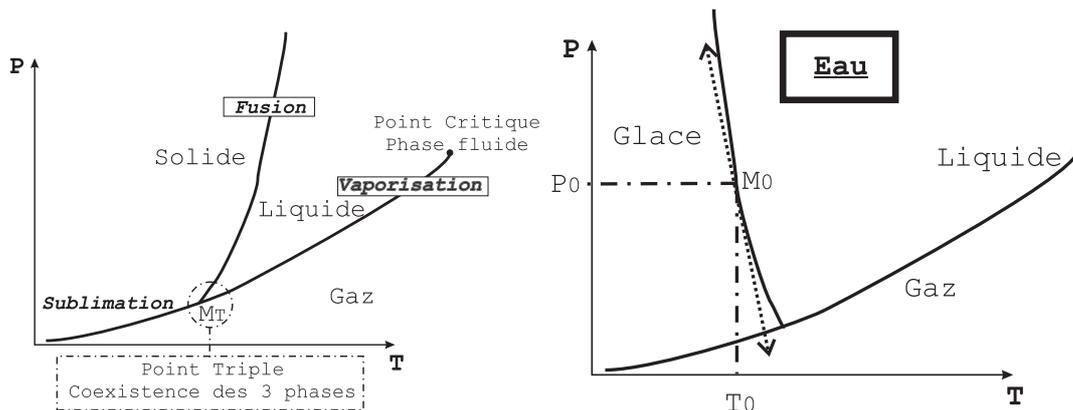


FIG. 2003.4 – Diagramme générique (T,P) des phases d'un corps (à gauche) pur, de l'eau (à droite)

entre deux phases. Cette quantité est le coefficient directeur de la tangente sur le diagramme représenté sur la figure 2003.4. En appliquant cette relation au point "atmosphérique" $M_0(T_0, P_0)$ sur la courbe de fusion, il vient :

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{P_0, T_0} = \frac{L_f}{T_0(u_L - u_S)}$$

soit :

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{P_0, T_0} = \frac{334 \cdot 10^3}{273 \cdot (1,00 \cdot 10^{-3} - 1,09 \cdot 10^{-3})} = -13,6 \cdot 10^6 \text{ Pa/K}$$

III.2. 2. Il suffit de faire un petit schéma comme sur la figure 2003.5. La compression isotherme fait passer le système du point $M_0(T_0, P_0)$ au point $M_1(T_0, P_1)$ avec $P_1 > P_0$. Comme on le voit sur la figure 2003.5, le point M_1 descriptif de l'état du système est dans la zone d'existence stable de l'eau liquide **exclusivement**. Dans les deux cas évoqués (état initial solide ou liquide), l'état final sera le même : le système sera **liquide**.

Le point M' de coexistence solide liquide à la pression P_1 correspond à une température plus faible que T_0 . Lorsque

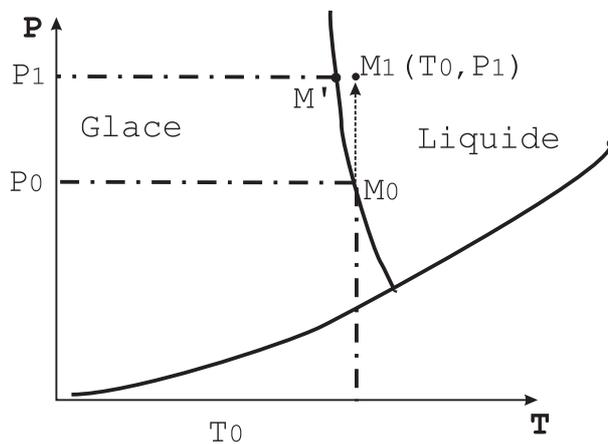


FIG. 2003.5 – Compression isotherme au voisinage du changement de phase

l'on augmente la pression, la température de fusion de la glace s'abaisse. C'est pourquoi, en particulier, au pôle Nord, sous les épaisses calottes de glace (parfois plusieurs kilomètres d'épaisseur), l'eau reste liquide à des températures bien inférieures à 0°C . Il faut noter qu'alors l'eau est dans un état d'équilibre et non dans un état métastable de surfusion comme il était question dans le paragraphe II.

III.2. 3. Sur une surface glacée, si l'on se promène avec des chaussures à crampons métalliques (en fait des pointes métalliques) on va diminuer la surface sur laquelle repose le poids du randonneur. La pression au sol augmente donc sous les crampons. Il est alors possible que la température de la glace passe au dessus de la température de fusion pour cette

pression. Il se forme alors une pellicule d'eau liquide entre la pointe métallique et la glace : ça glisse ! C'est d'ailleurs le principe de fonctionnement du patin à glaces ou du ski. Les crampons métalliques sont fait pour pénétrer la glace non pour s'appuyer dessus.

On peut faire une petite application numérique utilisant la relation de Clapeyron pour calculer l'ordre de grandeur la variation de la température de fusion de la glace δT lorsque l'on impose une variation de pression δP .

Si la masse du randonneur est de 100 kg et la surface totale d'appui des crampons de 1 cm^2 , alors :

$$\delta P \sim \frac{9,81 \cdot 100}{5 \cdot 10^{-4}} \sim \frac{10 \cdot 100}{1 \cdot 10^{-4}} \sim 1 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

On peut approcher la quantité $\frac{\delta P}{\delta T}$ par la relation de Clapeyron autour du point M_0 soit :

$$\frac{\delta P}{\delta T} \sim \left(\frac{dP}{dT} \right)_{P_0, T_0}$$

D'après l'application numérique III.2.1, $\left(\frac{dP}{dT} \right)_{P_0, T_0} \sim -13,6 \cdot 10^6 \text{ Pa/K}$ d'où :

$$\delta T \sim \delta P \frac{1}{\left(\frac{dP}{dT} \right)_{P_0, T_0}} \sim -\frac{1 \cdot 10^7}{13,6 \cdot 10^6} \sim -0,7 \text{ K}$$

La température de fusion de la glace s'abaisse de quelques dixièmes de degré. Si l'on est en plein soleil (été) et que le glacier est proche de $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, cette variation n'est pas négligeable et peut provoquer un changement de phase localisé.

—

B ELECTROSTATIQUE

Ce problème est une application directe du cours, on y retrouve les distributions de charges ponctuelles et continues dans une symétrie radiale sphérique.

I. Potentiel

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

I.1. Le champ électrique étant radial, le potentiel l'est aussi. Il faut donc intégrer la relation ci dessus sur un chemin \vec{dl} judicieux entre deux bornes bien choisies selon l'expression du champ électrique. On considère un point courant situé à la distance u du centre O , $u < r$. Le point où l'on calcule le potentiel est en r . On choisit $\vec{dl} = \vec{du}$, vecteur déplacement élémentaire radial au point situé à la distance u .

– Pour $r > R$, comme \vec{E} est radial,

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{du} = -E(u)du = -\frac{kR^2}{2\epsilon_0 u^2} du$$

On intègre cette équation entre $u = r$ et $u = \infty$, il vient

$$V(\infty) - V(r) = \int_r^{+\infty} dV = - \int_r^{+\infty} \frac{kR^2}{2\epsilon_0 u^2} du = \left[\frac{kR^2}{2\epsilon_0 u} \right]_r^{+\infty} = -\frac{kR^2}{2\epsilon_0 r}$$

$$V(\infty) = 0 \text{ donc } \boxed{V(r) = \frac{kR^2}{2\epsilon_0 r}}$$

– Pour $r \leq R$, comme \vec{E} est radial,

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{du} = -E(u)du = -\frac{k}{2\epsilon_0} du$$

On intègre cette équation entre $u = 0$ et $u = r$, il vient :

$$V(r) - V(0) = \int_0^r dV = - \int_0^r \frac{k}{2\epsilon_0} du = - \left[\frac{k}{2\epsilon_0} u \right]_0^r = -\frac{kr}{2\epsilon_0}$$

Le potentiel est une fonction qui **doit** être continue. $V(r = R)$ doit être égal pour les deux expressions de $V(r)$.

On a donc :

$$\begin{cases} V(R) - V(0) &= -\frac{kR}{2\epsilon_0} \\ V(R) &= \frac{kR^2}{2\epsilon_0 R} = \frac{kR}{2\epsilon_0} \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations, il vient

$$V(0) = \frac{kR}{\epsilon_0}$$

Soit finalement :

$$\boxed{V(r) = \frac{k(R - r/2)}{\epsilon_0}}$$

I.2. La figure 2003.6 montre l'évolution du potentiel en fonction de r . On peut voir la partie linéaire du potentiel entre $r = 0$ et $r = R$ puis une décroissance hyperbolique. On peut remarquer le point $r = R$:

$$V(R) = \frac{kR}{2\epsilon_0}$$

II. Charge volumique

L'équation de Maxwell-Gauss est donnée dans l'énoncé :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Soit en tenant compte de l'expression de la divergence qui est donnée :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 E(r)] = \frac{d}{dr} E(r) + \frac{2}{r} E(r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

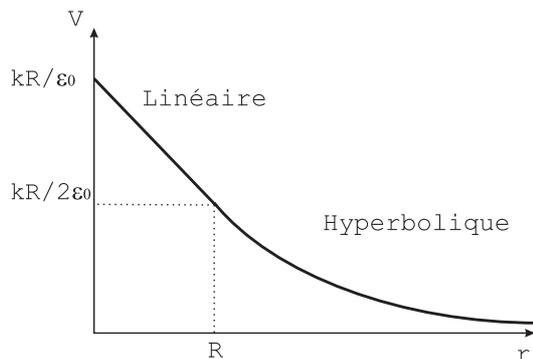


FIG. 2003.6 – Evolution du potentiel en fonction de r

– Dans le cas $r > R$, en substituant l'expression de $E(r)$ dans l'équation différentielle précédente, il vient :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \right) + \frac{2}{r} \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \text{ soit } \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{2kR^2}{2\varepsilon_0 r^3} + \frac{2kR^2}{2\varepsilon_0 r^3} = 0$$

Soit $\rho = 0$. La densité de charges est nulle au delà de R .

– Dans le cas $r \leq R$, $E(r) = k/2\varepsilon_0$. La dérivée du champ de long r est donc nulle. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = 0 + \frac{2k}{2\varepsilon_0 r} \text{ soit } \rho = \frac{k}{r}$$

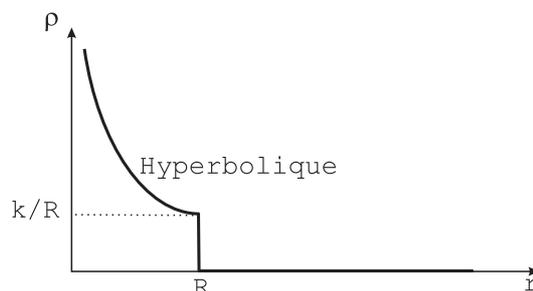


FIG. 2003.7 – Evolution de la densité de charges

III. Charge totale q_0

III.1. Soit dq la charge électrique comprise dans une coquille sphérique de rayon $r < R$ et d'épaisseur dr . Soit $d\tau$ le volume de cette coquille sphérique. Ce volume est le produit de la surface de la coquille sphérique par son épaisseur dr . On a donc :

$$dq = \rho(r)d\tau = \rho(r)4\pi r^2 dr$$

III.2. La charge totale q_0 de la distribution de charges est donc la somme de toutes les charges contenues dans toutes les coquilles sphériques. Comme ces dernières sont d'épaisseur infinitésimale, on effectue une sommation continue. Soit, puisque $\rho = 0$ lorsque $r > R$:

$$q_0 = \int_{r=0}^{+\infty} dq = \int_{r=0}^R \rho(r)4\pi r^2 dr = \int_{r=0}^R 4\pi k r dr$$

Il vient donc $q_0 = 2\pi k R^2$

III.3. On rappelle le théorème de Gauss dans sa généralité. Soit Σ une surface quelconque **fermée** qui entoure le volume V . On appelle \vec{dS} , le vecteur élément infinitésimal de surface en un point de Σ , orienté vers l'extérieur de Σ . On appelle Q_i la charge électrique totale intérieure à la surface Σ . Le théorème de Gauss lie le flux du champ électrique \vec{E}

au travers Σ à la charge Q_i :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

On choisit pour la surface Σ une sphère de rayon $r > R$. Le vecteur élément de surface est radial et s'écrit donc : $d\vec{S} = dS\vec{e}_r$. La charge totale intérieure à cette sphère est la charge q_0 précédemment calculée. Le théorème de Gauss s'écrit alors (puisque dS ne dépend pas de r) :

$$\frac{q_0}{\epsilon_0} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} E(r) dS = E(r) \oiint_{\Sigma} dS = E(r) \times 4\pi r^2$$

Soit finalement :

$$E(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cette expression est bien l'expression du champ électrique qui serait généré par une charge ponctuelle q_0 placée en O .

IV. Deux charges ponctuelles

Il faut faire un schéma de la structure étudiée.

IV.1. La force qu'exerce q_0 sur q est orientée sur la droite OA , d'intensité proportionnelle à $|q_0q|$ et inversement

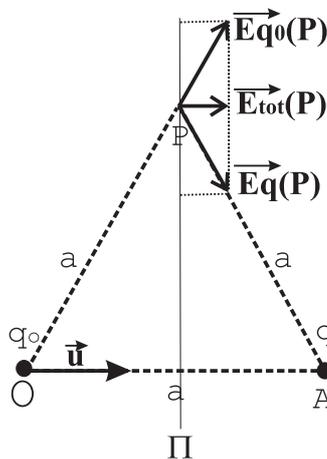


FIG. 2003.8 – Schéma de deux charges ponctuelles

proportionnelle à a^2 . Si $q_0q < 0$ elle est orientée de A vers O . Soit :

$$\vec{f}_{q_0q} = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}$$

IV.2. P est équidistant de O et de A . Il est donc sur le plan Π orthogonal à la droite OA passant par le milieu de ce segment. D'autre part, comme la distance $AP = a$ est fixée, P est sur la sphère de rayon A et de centre a . P est donc à l'intersection de cette sphère et de plan Π . P est donc sur le cercle de centre I (milieu de OA) et de rayon IP . Dans le triangle rectangle AIP on a la relation :

$$PA^2 = IA^2 + IP^2 \text{ soit } a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + IP^2 \text{ soit } IP = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$P \text{ est donc sur le cercle de centre } I \text{ de rayon } \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

IV.2. 1. On va montrer que le champ électrique total en P , $\vec{E}_{tot}(P)$ est parallèle et de même sens que le vecteur \vec{u} . Pour cela, on propose deux démonstrations basées sur le fait que $q = -q_0$.

1. Le plan Π , médiateur de $[OA]$, est plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique, étant un vrai vecteur, est, **en tout point de ce plan** orthonal à ce plan. Il est donc parallèle à la droite OA . Au point I du plan Π le vecteur $\vec{E}_{tot}(I)$ est orienté de O vers A (dans le même sens que \vec{u}). Il en est de même en tout point du plan.

2. Une autre démonstration consiste à faire un petit schéma en utilisant le théorème de superposition en supposant que q_0 est positif (comme indiqué sur la figure 2003.8). Le champ total au point P est la somme du champ \vec{E}_{q_0} créé par q_0 et du champ \vec{E}_q par q . Ces deux vecteurs sont de normes égales du fait de l'équidistance entre O , A , et P . \vec{E}_{q_0} est orienté de O vers P , \vec{E}_q de P vers A . Leur projection respective sur l'axe \vec{u} sont les mêmes et leur projection sur l'axe orthogonal à \vec{u} sont opposées. La somme vectorielle de ces deux champs est donc parallèle et de même sens que \vec{u} .

On a donc :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(P) = E(P)\vec{u}}$$

IV.2. 2. Le théorème de superposition donne :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tot}}(P) &= \vec{E}_{q_0}(P) + \vec{E}_q(P) \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{OP} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{AP} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3} (q_0 \vec{OP} + q \vec{AO} + q \vec{OP}) \end{aligned}$$

Comme $q = -q_0$ et que $\vec{AO} = -a\vec{u}$, il vient :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{tot}}(P) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}}$$

IV.2. 3. Deux méthodes sont possibles pour montrer que le potentiel $V_{\text{tot}}(P)$ est nul au point P .

1. Le champ électrique est le **gradient** du potentiel. Dans le plan Π , ce vecteur est orthogonal au plan. Ce qui signifie que le potentiel ne varie pas dans le plan. Il y est constant. Dans le plan Π , le potentiel à une distance infinie des charges est nul. Le potentiel est donc nul dans tout le plan Π .
2. On écrit le théorème de superposition pour le potentiel total. Soit :

$$\begin{aligned} V(P) &= V_{q_0}(P) + V_q(P) \\ &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 OP} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AP} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} (q_0 + q) \end{aligned}$$

Comme $q = -q_0$, il vient $V(P) = 0$

Remarque : Le résultat de la première démonstration est bien plus général que celui de la seconde. On y démontre, en effet, qu'en tout point du plan médiateur le potentiel est nul. En utilisant le théorème de superposition, on pourrait démontrer aussi que le potentiel est nul en tout point du plan et pas uniquement sur les points P tels que $OP = AO = AP$. Ce résultat permet, entre autre, de résoudre des problèmes d'électrostatique, par la méthode dite "méthode des images".

C ELECTRODINAMIQUE

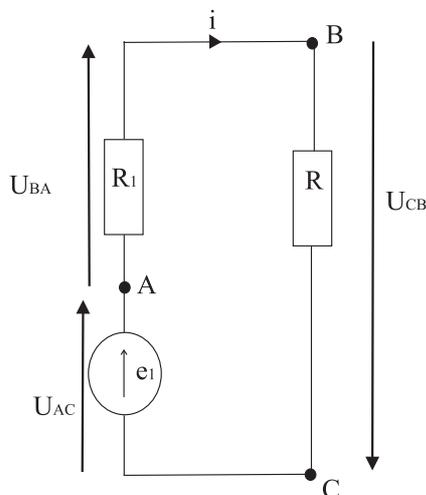


FIG. 2003.9 – Schéma du circuit

I. Générateur équivalent

I.1. On applique la loi des mailles à l'ensemble du circuit :

$$U_{AA} = U_{AC} + U_{CB} + U_{BA} = e_1 - R_1 i - R i = 0$$

Soit

$$i = \frac{e_1}{R_1 + R}$$

I.2. La tension du générateur de Thévenin équivalent est la tension \$U_{CB}\$ qui existe aux bornes de \$R\$, lorsque le dipôle \$CB\$ n'est pas branché sur une charge extérieure. Soit :

$$e_{th} = R i = \frac{R}{R_1 + R} e_1$$

La résistance \$R_{th}\$ est la résistance équivalente quand on remplace le générateur idéal \$e_1\$ par un fil. On a donc la mise en parallèle de \$R\$ et \$R_1\$. On a donc :

$$R_{th}^{-1} = R^{-1} + R_1^{-1} \text{ soit } R_{th} = \frac{R R_1}{R_1 + R}$$

I.3. L'application numérique est immédiate :

$$\begin{aligned} i &= \frac{e_1}{R_1 + R} = \frac{10}{(1 + 9)10^3} = 10^{-3} \text{ A} \\ e_{th} &= \frac{R}{R_1 + R} e_1 = \frac{9 \cdot 10^3}{10^4} \cdot 10 = 9 \text{ V} \\ R_{th} &= \frac{R R_1}{R_1 + R} = \frac{9 \cdot 10^6}{10^4} = 900 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

I.4. On a la relation :

$$i = \frac{e_1}{R_1 + R} \text{ soit en prenant le logarithme, } \ln(i) = \ln(e_1) + \ln\left(\frac{1}{R_1 + R}\right)$$

En différenciant cette expression, il vient immédiatement :

$$\frac{di}{i} = \frac{de_1}{e_1}$$

II. Générateurs en opposition

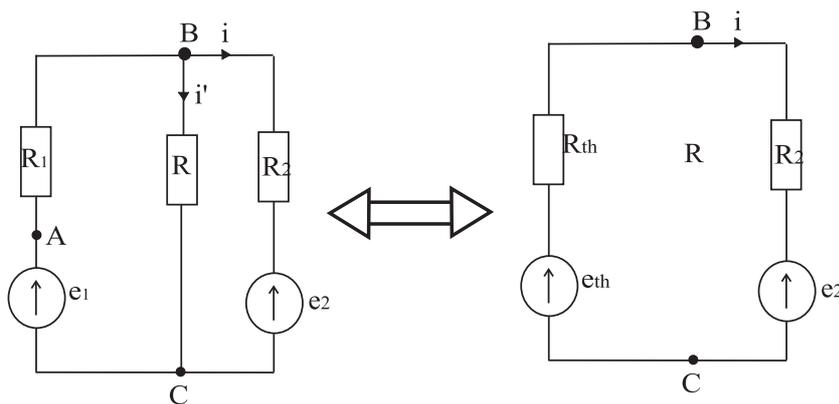


FIG. 2003.10 – Equivalence en circuit de Thévenin

Sur la figure 2003.10 est représentée l'équivalence du circuit avec le générateur de Thévenin calculé à la question précédente. C'est à partir de cette équivalence que l'on va traiter cette partie de l'énoncé.

II.1. La loi des mailles sur le circuit avec le générateur de Thévenin amène :

$$e_{th} - R_{th}i = R_2i + e_2 \text{ soit : } i = \frac{e_{th} - e_2}{R_{th} + R_2}$$

Or dans le circuit proposé, $U_{BC} = Ri' = R_2i + e_2$, soit finalement :

$$i' = \frac{R_2}{R(R_{th} + R_2)}(e_{th} - e_2) + \frac{e_2}{R}$$

avec e_{th} et R_{th} calculées dans la partie I.

II.2. En différenciant cette dernière relation, il vient :

$$di' = \frac{R_2}{R(R_{th} + R_2)} de_{th}$$

Or en différenciant logarithmiquement l'expression obtenue pour e_{th} à la question I.2, on a la relation

$$\frac{de_{th}}{e_{th}} = \frac{de_1}{e_1}$$

Il vient alors pour di'

$$di' = \frac{R_2}{R(R_{th} + R_2)} e_{th} \frac{de_1}{e_1} \Rightarrow \frac{di'}{i'} = \frac{R_2}{R(R_{th} + R_2)} \frac{e_{th}}{i'} \frac{de_1}{e_1}$$

Remarque Il suffit "alors" de remplacer i' par son expression obtenu en II.1. pour obtenir une expression littérale complète. Cependant, cela alourdit considérablement l'expression et augmente les risques d'erreurs. Si l'on regarde la question suivante, on s'aperçoit que l'on a toutes les expressions pour la traiter complètement par étapes. Il est donc plus raisonnable d'arrêter le calcul de la variation relative ici.

II.3. Application numérique : D'après II.1 et les données numériques calculées en I. :

$$i' = \frac{10^3}{9 \cdot 10^3 (900 + 10^3)} (9 - 10) + \frac{10}{9 \cdot 10^3} \sim 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

alors :

$$\frac{R_2}{R(R_{th} + R_2)} \frac{e_{th}}{i'} = \frac{10^3}{9 \cdot 10^3 (900 + 10^3)} \frac{9}{1,0510^{-3}} \sim 0,5$$

Avec ces données numériques, on a donc :

$$\frac{di'}{i'} \sim 0,5 \frac{de_1}{e_1}$$

Donc $\frac{di'}{i'} < \frac{de_1}{e_1}$

II.4. Cette question est un peu surprenante, au vu des applications numériques proposées. En effet, les courants de démarrage des démarreurs de voitures sont de l'ordre de grandeur de quelques ampères et non du milliampère. Les résistances internes des batteries sont bien plus faibles que les valeurs numériques proposées ici (de l'ordre du dixième d'Ohm), et le démarreur est "en court circuit" au démarrage.

Ce que l'on peut dire est que si l'on monte les deux batteries de voiture en série, on se ramène au problème de la partie I, à savoir que : $\frac{di'}{i'} = \frac{de_1}{e_1}$. et R modélise alors la résistance du démarreur.

Par contre si on les monte en opposition alors $\frac{di'}{i'} < \frac{de_1}{e_1}$. Ce qui signifie que si e_1 est la batterie en panne, e_2 la supplée mieux si on la monte en opposition plutôt qu'en série.

—

D OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

I. Mesure de la distance focale d'une lentille

I.1. Sur la figure 2004.3 est reproduit le schéma de l'énoncé. Pour tracer l'image $A'B'$ de l'objet AB , on utilise la propriété

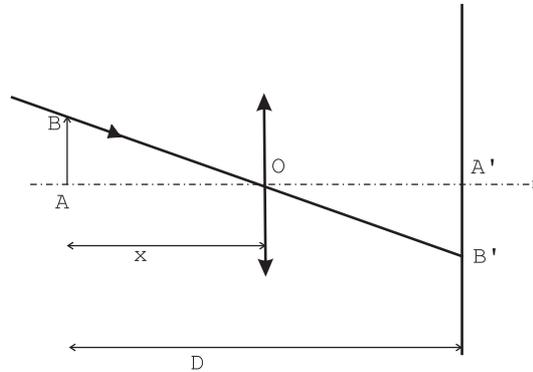


FIG. 2003.11 – Schéma optique

des lentilles de ne pas dévier tout rayon qui passe par le centre optique O de la lentille. Ainsi le point A' (qui est sur l'écran puisque l'image est nette) est à l'intersection de OA avec l'écran. Le point B' s'obtient graphiquement en traçant le rayon lumineux passant par B et O . Comme $A'B'$ est sur l'écran, il est donc à l'intersection de la droite OB et de l'écran.

I.2. Posons $x = \overline{AO}$. A' est sur l'écran. Par la relation de Chasles sur les distances algébriques :

$$\overline{AO} = \overline{AA'} + \overline{A'O}$$

soit

$$x = D + \overline{A'O} \text{ soit } \overline{OA'} = D - x$$

I.3. La relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Soit

$$\frac{1}{D - x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

En multipliant par $(D - x)x f'$, on obtient l'équation du second degré en x suivante :

$$Df' = x(D - x) \text{ soit } x^2 - Dx + Df' = 0$$

I.4. Le discriminant Δ de cette équation est :

$$\Delta = D^2 - 4Df'$$

Pour que cette équation est au moins une solution réelle, il faut que $\Delta > 0$, soit :

$$D > 4f' = D_{\min}$$

Si $\Delta < 0$ alors les solutions sont complexes. Elles ne sont plus physiquement acceptables.

I.5.

I.5. 1. Les solutions de cette équation sont donc :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\frac{f'}{D}} \right) \\ x_2 = \frac{D}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{f'}{D}} \right) \end{cases}$$

I.5. 2. $d = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A} + \overline{AO_2} = x_2 - x_1$, d'après précédemment :

$$d = D\sqrt{1 - 4\frac{f'}{D}} \text{ soit } \frac{d^2}{D^2} = 1 - 4\frac{f'}{D} \Rightarrow f' = \frac{D}{4} \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)$$

I.5. 3. Cette méthode est nommée **Méthode de Bessel**

I.5. 4. Application numérique :

$$f' = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{0,725 - 0,275}{1}\right)^2\right] \sim 0,199 \text{ m}$$

II. Mesure de la focale d'une lentille divergente

II.1. On peut schématiser la formation de l'image A'' par la petite figure ci dessous :

$$A \xrightarrow{L_I} A' \xrightarrow{L_{II}} A''$$

On a les alors les deux relations de conjugaisons sur les deux lentilles centrée en O :

$$\begin{cases} \frac{1}{0A'} - \frac{1}{0A} = \frac{1}{f'_I} \\ \frac{1}{0A''} - \frac{1}{0A'} = \frac{1}{f'_{II}} \end{cases}$$

Additionnant ces deux relations, il vient :

$$\frac{1}{0A''} - \frac{1}{0A} = \frac{1}{f'_I} + \frac{1}{f'_{II}} = \frac{1}{f'}$$

qui est la relation de conjugaison de la lentille L .

Soit :

$$f' = \frac{f'_I f'_{II}}{f'_I + f'_{II}}$$

II.2. D'après I, pour que l'image soit nette il faut que $D > D_{min} = 4f'$, il faut donc que :

$$4\frac{f'_I f'_{II}}{f'_I + f'_{II}} < D \Rightarrow f'_I (4f'_{II} - D) < Df'_{II}$$

Soit finalement :

$$f'_I < f_{I,max} = \frac{1}{\frac{4}{D} - \frac{1}{f'_{II}}}$$

II.3. Application numérique :

$$f_{I,max} = \frac{1}{\frac{4}{1} + \frac{1}{0,3}} \sim 0,136 \text{ m}$$

— FIN —

Epreuve de 2004

A CIRCUITS ÉLECTRIQUES : QUARTZ PIÉZO-ÉLECTRIQUE

Il est indispensable de faire un schéma pour simplifier l'explication des notations et pour mieux comprendre ce qui est demandé dans l'énoncé.

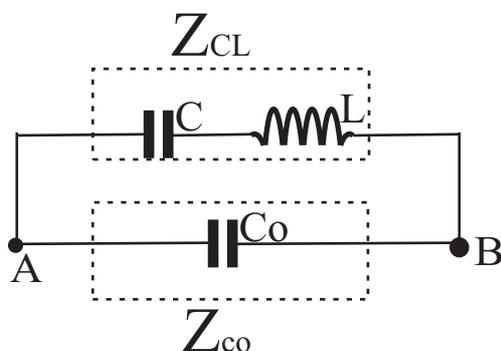


FIG. 2004.1 – Schéma du circuit

.1. Le circuit est composée de deux impédances complexes Z_{CL} et Z_{C_0} montées en parallèle, comme indiqué sur la figure 2004.1. On a donc :

$$\underline{Z_{AB}}^{-1} = \underline{Z}^{-1} = \underline{Z_{CL}}^{-1} + \underline{Z_{C_0}}^{-1}$$

Pour une inductance pure L , l'impédance complexe est $\underline{Z_L} = jL\omega$ et pour une capacité C , l'impédance complexe est $\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$. Soit finalement :

$$\underline{Z_{CL}} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

Soit

$$\begin{aligned} \underline{Z_{AB}}^{-1} &= \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} + jC_0\omega \\ &= j \left(\frac{1}{-L\omega + \frac{1}{C\omega}} + C_0\omega \right) \\ &= jC_0\omega \left(\frac{1}{-LC_0\omega^2 + \frac{1}{a}} + 1 \right) \\ &= jC_0\omega \left(\frac{a}{-LC_0a\omega^2 + 1} + 1 \right) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{-j}{C_0\omega} \left(\frac{1}{\frac{a}{-LC_0a\omega^2 + 1} + 1} \right)$$

.2. Le module $|\underline{Z}| = Z$ est donc le module du nombre imaginaire pur que l'on vient d'exprimer en fonction des données du problème :

$$Z = \frac{1}{C_0\omega} \left| \frac{1}{\frac{a}{-LC_0a\omega^2 + 1} + 1} \right|$$

.3. L'argument ϕ d'un nombre complexe z est défini par le rapport des parties réelle et imaginaire :

$$\tan \varphi = \frac{\Im(z)}{\Re(z)}$$

L'impédance \underline{Z}_{AB} est un nombre imaginaire pur. La partie réelle est nulle. Le nombre $\tan \varphi$ tend donc vers l'infini, ce qui correspond à un angle de module $\pi/2$. On a donc :

$$|\varphi| = \frac{\pi}{2}$$

Cependant, selon la valeur de ω , la partie imaginaire de \underline{Z} peut être positive ou négative. Si $\Im \underline{Z} > 0$ alors $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, sinon, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Le dénominateur de \underline{Z} s'annule lorsque :

$$1 - aLC_0\omega^2 = -a \text{ soit pour } \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{1+a}{aLC_0}}$$

Si $\omega > \omega_2$, alors le dénominateur est négatif, sinon il est positif. On peut donc faire le tableau suivant :

ω	$\omega < \omega_2$	ω_2	$\omega > \omega_2$
φ	$+\frac{\pi}{2}$	\parallel	$-\frac{\pi}{2}$

.4. On a déjà trouvé l'expression de ω_2 à la question précédente. Pour calculer ω_1 , remarquons que $|\underline{Z}|$ s'annule lorsque son dénominateur tend vers l'infini, soit lorsque :

$$1 - aLC_0\omega^2 = 0$$

Soit pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{aLC_0}}$.

On peut remarquer que $\omega_2 = \sqrt{1+a}\omega_1 > \omega_1$. Il vient alors :

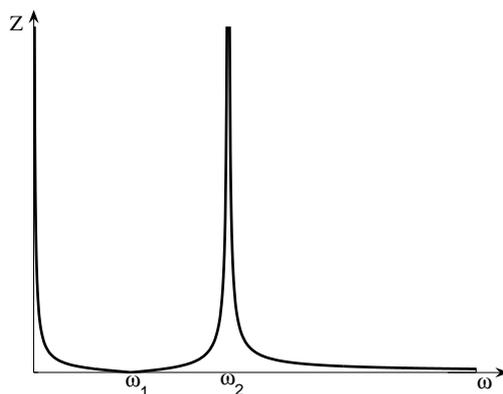
$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{C_0\omega} \left| \frac{1}{\frac{a}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} + 1} \right| \\ &= \frac{1}{C_0\omega} \left| \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{a + 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \right| \\ &= \frac{1}{C_0\omega} \left| \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{(a+1)\omega_1^2 - \omega^2} \right| \end{aligned}$$

Puisque $\omega_2 = \sqrt{(1+a)}\omega_1 > \omega_1$, il vient donc :

$$Z = \frac{1}{C_0\omega} \left| \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_2^2 - \omega^2} \right|$$

.5. Le comportement des facteurs de Z en fonction des valeurs de ω est représenté dans le tableau suivant.

	$\omega \rightarrow 0$	$\omega \rightarrow \omega_1$	$\omega \rightarrow \omega_2$	$\omega \rightarrow \infty$
$\frac{1}{\omega}$	$\rightarrow \infty$	$\sim \frac{1}{\omega_1}$	$\sim \frac{1}{\omega_2}$	$\rightarrow 0$
$ \omega^2 - \omega_1^2 $	$\sim \omega_1^2$	~ 0	$\sim \omega_2^2 - \omega_1^2 $	$\sim \omega^2$
$\frac{1}{ \omega^2 - \omega_2^2 }$	$\sim \frac{1}{\omega_2^2}$	$\frac{1}{ \omega_2^2 - \omega_1^2 }$	$\rightarrow \infty$	$\sim \frac{1}{\omega^2}$
$\frac{1}{\omega} \frac{ \omega^2 - \omega_1^2 }{ \omega^2 - \omega_2^2 }$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$

FIG. 2004.2 – Allure de Z en fonction de ω .

Z possède donc des asymptotes verticales en $\omega \rightarrow 0$ et en $\omega \rightarrow \omega_2$. Z s'annule en ω_1 et tend vers 0 lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Finalement, on peut tracer l'allure de Z en fonction de ω . Celle-ci est représentée sur la figure 2004.2.

.6. Pour $\omega = \omega_1$, le module Z de l'impédance du dipôle AB est nul. Le dipôle se comporte donc comme **un fil simple infiniment conducteur**.

Pour $\omega = \omega_2$, le module Z de l'impédance du dipôle AB tend vers l'infini. Le dipôle se comporte donc comme **un interrupteur ouvert**.

B THERMODYNAMIQUE

I.

I.1. L'évaporation est le nom donné au phénomène physique de changement d'état d'une phase liquide vers une phase gazeuse. Lorsque la pression et la température d'un corps liquide sont celles du changement d'état vers la phase gazeuse, on observe à l'équilibre la coexistence des deux phases. La pression de la phase gazeuse est alors la pression de vapeur saturante.

Imaginons une toute petite goutte d'eau que l'on introduit dans une enceinte où règne le vide. La goutte d'eau va complètement s'évaporer. L'enceinte sera alors remplie de vapeur d'eau (assimilable à un gaz parfait). On est en présence de **vapeur sèche**. Si l'on continue à introduire de l'eau liquide dans l'enceinte, au bout d'une certaine quantité d'eau, il restera de l'eau sous forme liquide. On est alors en présence de **vapeur saturante**. Les deux phases coexistent. La pression du gaz est alors la **pression de vapeur saturante**. Sa valeur ne dépend **que** de la température et non du volume de l'enceinte.

I.2. I. 2. a. Puisque l'on **impose** la pression à l'intérieur de l'enceinte à la pression de vapeur saturante pour la température de l'eau, on impose l'équilibre liquide-vapeur. On vaporise donc la masse m d'eau liquide de façon quasi-statique.

I. 2. b.

Par définition de la chaleur latente, la quantité de chaleur est :

$$Q = mL_v(T_1)$$

Application numérique : $Q = 0,5 \times 2,48 \cdot 10^6 = 1,24 \cdot 10^6$ J

I. 2. c.

Pour un système physique soumis aux seules forces de pression extérieure, de pression P_{ext} , le travail élémentaire δW échangé pendant une transformation élémentaire est :

$$\delta W = -P_{ext}dV$$

Le travail échangé pendant la vaporisation est donc l'intégrale de ce travail élémentaire sur toute la transformation :

$$W = - \int P_{ext}dV$$

Le système considéré ici est la masse d'eau initialement liquide et finalement gazeuse introduite dans l'enceinte. Appelons V_i et V_f les volumes respectivement initial (eau liquide) et final (vapeur) de ce système. Comme la pression extérieure est constante et vaut $P_v(T_1)$, il vient :

$$W = - \int_{\text{vaporisation}} P_{ext}dV = -P_{ext} \int_{\text{vaporisation}} dV = -P_{ext}(V_f - V_i) = P_v(T_1) \cdot (V_i - V_f)$$

Comme le volume du liquide est négligé devant celui du gaz, que l'on considère comme un gaz parfait, il vient :

$$W = -P_v(T_1)V_f = -nRT_1 = -\frac{m}{M}RT_1$$

où n est le nombre de mol de molécules d'eau.

Application numérique : $W = -8,32 \times 293 \times \frac{0,5}{18 \cdot 10^{-3}} \sim -67,7 \cdot 10^3$ J

I. 2. d.

Le premier principe énonce que la variation d'énergie interne ΔU pour une transformation macroscopique est :

$$\Delta U = W + Q$$

Application numérique : $\Delta U = -67,7 \cdot 10^3 + 1,24 \cdot 10^6 = 1,17 \cdot 10^6 \text{ J}$

I. 2. e.

La variation d'enthalpie ΔH est la quantité de chaleur échangée pour une transformation **isobare** (pression constante).

Donc :

$$\Delta H = Q$$

Application numérique : $\Delta H = 1,24 \cdot 10^6 \text{ J}$

I. 2. f.

Pour une transformation quasi-statique (ou réversible), la variation d'entropie est :

$$\Delta S = \int_{\text{transfo}} \frac{\delta Q}{T}$$

Si la transformation est isotherme, T reste constante pendant la transformation, il vient :

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

La transformation proposée ici est isotherme : la température est constante à la valeur T_1 , et, isobare : la pression est constante et est fixée à la pression de vapeur saturante. Ce changement de phase a donc lieu à l'équilibre, la transformation est quasi-statique. Il vient donc :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1}$$

Application numérique : $\Delta S = \frac{1,24 \cdot 10^6}{293} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J/K}$

I. 2. g.

Bizzarerie de l'énoncé ? Manque de rigueur ? Question difficilement compréhensible dans la logique de l'énoncé. Dans l'énoncé, on explicite bien que l'eau est à la température T_1 et on ne fait **jamais** mention de température extérieure (constante on imagine). Il est donc raisonnable de penser que la transformation est isotherme (température initiale et finale identiques).

Si l'on imagine (ce que suggère l'énoncé) que l'enceinte de vaporisation est à une température T_2 extérieure (à priori non égale à T_1), les calculs proposés dans les questions a.b.c.d.e.f deviennent erronés. Pour les mener à bien le raisonnement est alors bien plus complexe.

Dans l'hypothèse d'une température extérieure T_2 , l'énoncé reste quand même peu pertinent puisqu'il n'est nullement besoin d'invoquer le second principe pour répondre à la question posée. En effet, la transformation se passe à pression constante ($P_v(T_1)$) d'après l'énoncé. Pour que la transformation soit réversible, il faut et il suffit (c'est la définition d'un tel type de transformation) que le système soit à **l'équilibre** en tout point de la transformation. Ce qui signifie que l'eau doit être à l'équilibre thermique et mécanique pendant toute la transformation. Comme elle est à la pression de vapeur saturante, pour qu'elle soit à l'équilibre pendant toute la transformation, il faut qu'elle soit à la température qui correspond à cette valeur de pression saturante, soit la température T_1 .

II.

II.1. Soit un changement de phase d'un corps pur qui passe de la phase α à la phase β . La relation de Clapeyron - qui lie la pente de la courbe de changement de phase (P, T) aux volumes molaires et la chaleur latente du changement de phase - s'écrit :

$$(v_\beta - v_\alpha) \frac{dP}{dT} = \frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{T}$$

où v_α et v_β sont les volumes molaires des phases α et β dans les conditions du changement de phase.

Attention aux notations : ici, $L_{\alpha \rightarrow \beta}$ est la chaleur latente de changement de phase exprimée par **unité de matière** et non par unité de masse. C'est une chaleur latente molaire :

$$L_{\alpha \rightarrow \beta} = M \cdot L_v$$

Ici, on néglige le volume molaire du liquide (phase α) devant celui du gaz (phase β). Il vient alors :

$$v_\beta \frac{dP}{dT} = \frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{T}$$

D'autre part, le volume molaire du gaz est donné par la relation de Boyle-Mariotte pour une mole de gaz à la pression P de vapeur saturante :

$$v_{\beta} = \frac{RT}{P}$$

D'où finalement :

$$\frac{RT}{P} \frac{dP}{dT} = \frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{T}$$

II.2. Il suffit d'intégrer cette dernière relation entre deux températures T_1 et T_2 . On a donc :

$$R \frac{dP}{P} = L_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{dT}{T^2}$$

Soit en intégrant entre $P_v(T_1)$ et $P_v(T_2)$ le membre de gauche et entre T_1 et T_2 , le membre de droite, il vient (puisque L est considérée comme constante) :

$$R \int_{P_v(T_1)}^{P_v(T_2)} \frac{dP}{P} = L_{\alpha \rightarrow \beta} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2}$$

Soit :

$$R \ln \frac{P_v(T_2)}{P_v(T_1)} = -L_{\alpha \rightarrow \beta} \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right]$$

Finalement :

$$P_v(T_2) = P_v(T_1) \exp \left[\frac{L_{\alpha \rightarrow \beta}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

ou encore

$$P_v(T_2) = P_v(T_1) \exp \left[\frac{M \cdot L_v}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

Application numérique : $P_v(T_2) = 2300 \exp \left[\frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 2,48 \cdot 10^6}{8,32} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{323} \right) \right] \sim 12600 \text{ Pa}$

Remarque sur les ordres de grandeur : L'énoncé donne la masse volumique de l'eau alors que dans nos calculs nous ne l'utilisons pas. On peut par contre vérifier le fait que le volume d'eau est négligeable devant celui du gaz. Le volume molaire v_l de l'eau liquide est :

$$v_l = \frac{M}{\rho} = \frac{18 \cdot 10^{-3}}{10^3} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{mol} = 18 \text{ ml}$$

Le volume molaire v_g de la vapeur d'eau à $P_v(T_1) = 2300 \text{ Pa}$ et $T_1 = 293 \text{ K}$ est :

$$v_g = \frac{RT_1}{P_v} = \frac{8,32 \times 293}{2300} = 1,05 \text{ m}^3$$

Pour la même quantité de matière, dans les conditions de l'énoncé, le volume de gaz est plus de 100 000 fois plus important que celui de l'eau. On peut donc légitimement négliger le volume de vapeur d'eau.

—

C OPTIQUE : ETUDE D'UN DOUBLEUR DE FOCALE

Il y a a deux écueils dans ce problème d'optique.

1. L'énoncé renomme toutes les distances et hauteurs sous forme de quantités positives (d, h, \dots), alors que les quantités optiques que l'on utilise dans les relations de conjugaison et grandissements sont des quantités algébriques. On a très vite fait de perdre le fil et de faire des erreurs de signe. Au brouillon, il faut donc faire les calculs le plus longtemps possibles avec les quantités algébriques et seulement à la fin du calcul, les écrire soigneusement avec les notations de l'énoncé. Comme en électrocinétique avec les fonctions de transfert, il est déconseillé de réduire au même dénominateur. Cela alourdit les écritures, multiplie les possibilités d'erreurs et souvent ne sert à rien.
2. L'énoncé commence de façon très générale et classique en demandant de retrouver une équation du second degré qui donne la position de l'image par rapport à la lentille. Et toutes les questions sont dans le même esprit d'utiliser les relations de conjugaison. Il se trouve que le placement de l'objet initial et des lentilles mènent à des positions particulières qui simplifie grandement les calculs et les explications (images sur des foyers, objet à l'infini, etc..). Il faut exploiter ces données mais surtout il faut expliquer les approximations que l'on fait.

Sur la figure 2004.3 est reproduit le schéma de l'énoncé. Celui-ci spécifie peu de notation, donc c'est au candidat d'en inventer quelques-unes. On appellera O le centre de l'objectif et on oriente le sens des distances algébriques selon le sens habituel de la représentation des rayons lumineux en optique géométrique (de gauche à droite). Pour tracer l'image $A'B'$

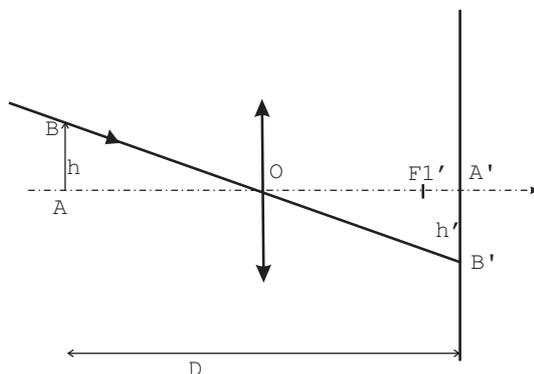


FIG. 2004.3 – Schéma optique

de l'objet AB , on utilise la propriété des lentilles de ne pas dévier tout rayon qui passe par le centre optique O de la lentille. Ainsi le point A' (qui est sur l'écran puisque l'image est nette) est à l'intersection de OA avec l'écran. Le point B' s'obtient graphiquement en traçant le rayon lumineux passant par B et O . Comme A', B' est sur l'écran, il est donc à l'intersection de la droite OB et de l'écran.

.1. Soit A' l'image d'un point A objet situé sur l'axe optique à la distance D de l'écran. La relation de conjugaison s'écrit pour les distances algébriques orientées :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'}$$

Si A' est sur l'écran, on a $\overline{OA'} = d$ et $\overline{OA} = d - D$. Il vient donc :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d - D} = \frac{1}{f_1'}$$

Réduisant au même dénominateur, il vient alors :

$$-Df_1' = d(d - D) \text{ soit } \boxed{d^2 - dD + Df_1' = 0}$$

qui est bien une équation du second degré en d

.2. $d < d_{\max} = 100 \text{ mm} = 0,1 \text{ m} = \frac{D}{500}$! On peut donc **négliger** d devant D . L'équation précédente admet alors la solution évidente :

$$d = f'_1$$

Application numérique : $d = 50 \text{ mm}$

.3. h' est la hauteur de l'image (voir figure 2004.3). Si l'on appelle γ le grandissement algébrique, il vient :

$$\gamma = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = -\frac{h'}{h} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (\text{Par les triangles homothétiques } OAB \text{ et } OA'B')$$

On a donc :

$$\frac{h'}{h} = \frac{f'_1}{D} \text{ soit } h' = \frac{f'_1}{D} h$$

Application numérique : $h' = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{50} \cdot 2 = 2 \text{ mm}$

.4. La lentille convergente de focale f'_1 va donner de l'objet AB une image réelle $A'B'$. Cette image va être un objet virtuel pour la lentille divergente de focale f'_2 et va donner une image réelle $A''B''$ sur l'écran. Pour construire graphiquement l'image $A''B''$ par la lentille 2 de $A'B'$ on utilise les faits suivants illustrés sur la figure 2004.4 :

1. Pour obtenir une image virtuelle avec une lentille divergente, il faut que l'objet virtuel soit située entre la lentille et le foyer objet. Ici, $A'B'$ doit donc être situé entre L_2 et F_2 .
2. Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en suivant une droite qui passe par le foyer image F'_2 .

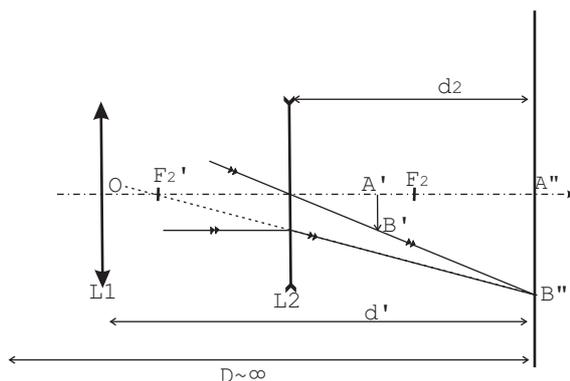


FIG. 2004.4 – Schéma du doubleur de focale

Appelons O_1 le centre de la lentille de focale f'_1 , O_2 celui de la lentille divergente de focale f'_2 , E le point d'intersection entre l'écran et l'axe optique ($E = A''$ lorsque l'on a effectué la mise au point). On écrit les deux relations de conjugaisons entre OA , OA' , et OA'' . Soit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{O_1 A'}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1} \\ \frac{1}{\overline{O_2 A''}} - \frac{1}{\overline{O_2 A'}} = \frac{1}{f'_2} \end{cases} \quad (2004.1)$$

D'après les notations de l'énoncé, lorsque la mise au point est nette $A'' = E$:

$$\overline{O_2 A''} = d_2 \text{ et } \overline{O_2 A'} = \overline{O_2 E} + \overline{EA'} = d_2 - d_1$$

La seconde équation du système (2004.1) devient donc :

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_2 - d_1} = \frac{1}{f'_2}$$

Réduisant au même dénominateur, il vient :

$$d_1(d_2 - f'_2) = d_2^2 \text{ soit } d_1 = \frac{d_2^2}{d_2 - f'_2}$$

Application numérique : $d_1 = \frac{40^2}{40 + 40} = 20 \text{ mm}$

.5. Le grandissement γ_2 de la deuxième lentille est :

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = + \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}} = + \frac{d_2}{d_2 - d_1}$$

(Par le même argument des triangles homothétiques $O_2A'B'$ et $O_2A''B''$).

Application numérique : $\gamma_2 = + \frac{40}{40 - 20} = 2$

.6. On reprend la première équation du système (2004.1), avec $\overline{O_1A} = \overline{O_1E} + \overline{EA} = d' - D$, et $\overline{O_1A'} = \overline{O_1E} + \overline{EA'} = d' - d_1$. Il vient donc :

$$\frac{1}{d' - d_1} - \frac{1}{d' - D} = \frac{1}{f_1'}$$

Comme $d' < d'_{\max} = 120 \text{ mm} \sim \frac{D}{417}$! on peut négliger d' devant D . Il vient alors.

$$\frac{1}{d' - d_1} = \frac{1}{D} + \frac{1}{f_1'} \text{ soit } d' = d_1 + \frac{Df_1'}{D + f_1'} \text{ et puisque } f_1' = D/1000, \boxed{d' = d_1 + f_1'}$$

Application numérique : $d' = 20 + 50 = 70 \text{ mm}$

.7.

$$\frac{h''}{h} = \frac{h''}{h'} \cdot \frac{h'}{h} = |\gamma_2| \cdot |\gamma|$$

Donc

$$\boxed{h'' = |\gamma_2| \cdot |\gamma| \cdot h}$$

Avec γ_2 et γ les grandissements respectifs des lentilles 2 et 1 calculés dans les questions précédentes.

Application numérique : $h'' = 2 \times 10^{-3} \times 2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}$

.8. Le grandissement γ de l'objectif seul est proportionnel à f_1' . Si l'on souhaite doubler le grandissement, avec ce seul dispositif, il est nécessaire de doubler la focale, ce qui oblige à doubler la distance de l'objectif à la pellicule (ou l'écran). Avec le doubleur de focale, on peut doubler le grandissement, sans modifier la chambre de l'appareil photo ($d' < d_{\max}$). Il suffit juste de modifier un peu la mise au point. Tout se passe donc comme si ce dispositif doublait effectivement la focale de l'appareil photo.

— FIN —

Epreuve de 2005

A ELECTROMAGNÉTISME

I. Cadre horizontal dans un champ uniforme et constant

Un conducteur se déplace dans un champ magnétique. Il va donc être le siège d'un courant induit. On sait par la loi de Faraday, qualifiée aussi de "loi de modération" que l'effet de ce courant est de s'opposer à la cause qui lui donne naissance. La barre va être soumise à une force de Laplace (courant électrique dans un conducteur soumis à un champ magnétique) qui va avoir tendance à ralentir la barre. Voilà ce que nous propose de démontrer cet énoncé.

I.1. Le flux Φ du champ magnétique au travers la surface plane rectangulaire **ABCD** est défini par l'intégrale de surface :

$$\Phi = \iint_{\text{ABCD}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est l'élément différentiel de surface du rectangle **ABCD**. Il est orienté en direction de façon orthogonale au plan et en sens, il est orienté par la règle de la main droite référencée sur l'orientation algébrique du circuit. Donc $d\vec{S} = dS\vec{e}_z$.

Il vient donc :

$$\vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 dS \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad \text{soit } \Phi = \iint_{\text{ABCD}} B_0 dS = B_0 \iint_{\text{ABCD}} dS = B_0 S_{\text{ABCD}}$$

où S_{ABCD} est la surface du rectangle. On a donc : $S_{\text{ABCD}} = xl$. Finalement,

$$\boxed{\Phi = xlB_0}$$

I.2. Il est étonnant que la démonstration de l'expression du champ électromoteur soit demandée. Elle n'est pas évidente et est plutôt un résultat classique de cours à connaître.

Considérons une particule chargée, d'une charge q , qui se déplace dans un référentiel \mathcal{R}_0 avec une vitesse \vec{v} , dans un champ magnétique \vec{B}_0 . La force de Lorentz \vec{f}_l qui s'applique sur cette particule est :

$$\vec{f}_l = q \left(\vec{v} \wedge \vec{B}_0 \right)$$

Tout se passe donc comme si la particule était soumise à une force électrique de la forme :

$$\vec{f}_l = q\vec{E}_m \quad \text{où } \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Il appartenait donc un champ électrique, appelé habituellement champ électromoteur qui a pour expression :

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0}$$

I.3. D'après l'analyse en préambule, le courant i va s'opposer au mouvement de la barre. La force de Laplace \vec{F}_L qui s'exerce sur la barre sera donc orientée selon $-\vec{e}_x$. Or :

$$\vec{F}_L = \int_A^B i d\vec{l} \wedge \vec{B}_0$$

où \vec{dl} est l'élément différentiel de longueur sur la barre AB, orienté de A vers B, soit selon \vec{e}_y . Pour que \vec{F}_L soit dans le sens $-\vec{e}_x$, il faut donc que i soit négatif. Le courant circule donc réellement dans le sens **opposé** à celui de la convention du schéma ($i < 0$).

I.4. Pour exprimer le courant i en fonction des données du problème, il faut tout d'abord exprimer la différence de potentiel U_{AB} induite entre les deux points A et B.

Pour cela on dispose de deux méthodes, la première basée sur le flux, la seconde sur le champ électromoteur.

1. Appliquons la loi de Faraday. La différence de potentiel e induite sur l'ensemble du circuit est :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -lB_0 \frac{dx}{dt} = -lB_0\dot{x}$$

2. On écrit que la différence de potentiel U_{AB} est l'intégrale du champ électromoteur sur la barre :

$$U_{AB} = \int_B^A dV = \int_B^A -\vec{E}_m \cdot \vec{dl} \text{ car } \vec{E} = -gradV$$

Comme

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = \dot{x}\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_z = -B_0\dot{x}\vec{e}_y \text{ et } \vec{dl} = dl\vec{e}_y$$

Il vient :

$$U_{AB} = \left(\int_B^A B_0\dot{x}\vec{e}_y \cdot dl\vec{e}_y \right) = B_0\dot{x} \int_B^A dl = B_0\dot{x}l$$

Il vient alors :

$$i = -\frac{U_{AB}}{R} = \frac{e}{R} = -\frac{B_0\dot{x}l}{R}$$

Remarques et conseils du correcteur sur cette question

Il est nécessaire de garder en tête que lorsqu'on utilise la loi de Faraday, la quantité e que l'on calcule est la différence de potentiel induite dans tout le circuit, comptée algébriquement dans la convention générateur. On a donc le schéma électrique de la figure 2005.1 Quand on intègre le champ électromoteur, il convient de bien spécifier les bornes d'intégration

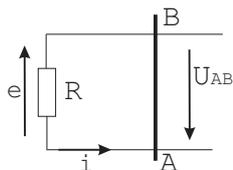


FIG. 2005.1 – Schéma électrique avec les conventions algébriques

du circuit. Il faut ensuite appliquer la loi d'Ohm au circuit dans la convention récepteur.

I.5. Avec le raisonnement précédent, il est clair que la force de Laplace s'oppose au mouvement de la barre. D'autre part, puisque on a le sens du courant i , avec la règle de la main droite, le sens de la force est immédiat. Le schéma est représenté sur la figure 2005.2.

I.6. La force de Laplace \vec{F}_L sur la barre est :

$$\vec{F}_L = \int_A^B i d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = i \int_A^B B_0 dl \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = iB_0l \vec{e}_x$$

Remplaçant i par son expression obtenue à la question 4., il vient

$$\vec{F}_L = -\frac{B_0^2 l^2}{R} \dot{x} \vec{e}_x$$

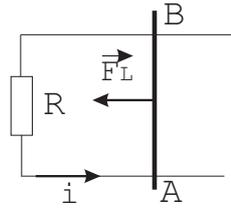


FIG. 2005.2 – Sens de la force de Laplace sur la barre

On applique ensuite le Principe Fondamental de la Dynamique à la barre de masse M . Pour cela, il est nécessaire de faire le bilan des forces agissant sur la barre.

$$\begin{aligned} \text{Le poids} & : M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z \\ \text{La force de Laplace} & : \vec{F}_L = -\frac{B_0^2 l^2}{R} \dot{x} \vec{e}_x \\ \text{La réaction des rails} & : \vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z \end{aligned}$$

La barre se déplace sans frottements : $R_x = 0$.

D'autre part l'accélération \vec{a} de la barre s'écrit $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ où y est l'ordonnée du centre de gravité de la barre.

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{F}_L + \vec{R} \Rightarrow M\ddot{x}\vec{e}_x + M\ddot{y}\vec{e}_y + M\ddot{z}\vec{e}_z = \left(-\frac{B_0^2 l^2}{R} \dot{x}\right) \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + (-Mg + R_z) \vec{e}_z$$

Sur l'axe \vec{e}_x , on obtient donc l'équation différentielle en \dot{x} :

$$M\ddot{x} = -\frac{B_0^2 l^2}{R} \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{B_0^2 l^2}{RM} \dot{x} = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en \dot{x} , à coefficient constant et à second membre nul. La solution est :

$$\dot{x} = A \exp\left[-\frac{B_0^2 l^2}{RM} t\right] \text{ où } A \text{ est une constante}$$

On détermine A par la condition initiale :

$$\text{En } t = 0, \quad \dot{x} = v_0 = A \exp(0) \text{ donc } A = v_0$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_0 \exp\left[-\frac{B_0^2 l^2}{RM} t\right] \vec{e}_x}$$

I.7. L'allure caractéristique de la vitesse en fonction du temps est représentée sur la figure 2005.3. C'est une exponentielle décroissante dont le temps caractéristique τ est

$$\tau = \frac{RM}{B_0^2 l^2}$$

I.8. τ est proportionnel à R . Une modification de R induit donc une modification de τ dans le même sens. En effet, la différence de potentiel induite qui apparaît dans la barre ne dépend que de la vitesse v de la barre. Par contre, le courant i qui est la cause de la force de Laplace (que l'on peut assimiler à une force de frottements fluide) est d'autant plus faible que la résistance R est grande. Pour une vitesse v_0 donnée, plus la résistance sera forte, plus la barre mettra de temps à s'arrêter. Une illustration de ce raisonnement est proposée sur la figure 2005.3.

II. Cadre incliné dans un champ uniforme et constant

II.1. On considère la base orthonormée directe $\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z'$ définie par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_x' &= \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z \\ \vec{e}_y' &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_z' &= \sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

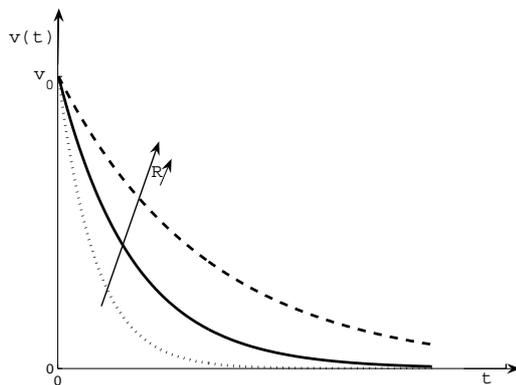


FIG. 2005.3 – Courbe caractéristique de $v(t)$

comme indiqué sur la figure 2005.4

Comme pour la question 1 de la première partie, le flux Φ' du champ magnétique au travers la surface plane rectangulaire ABCD est défini par l'intégrale de surface :

$$\Phi' = \iint_{\text{ABCD}} \vec{B}_0 \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ est l'élément différentiel de surface du rectangle ABCD. Il est orienté en direction de façon orthogonale au plan et en sens, il est orienté par la règle de la main droite référencée sur l'orientation algébrique du circuit. Donc $d\vec{S} = dS \vec{e}_z'$. Il vient donc :

$$\vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = B_0 dS \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z' = \cos \alpha \text{ soit } \Phi' = \iint_{\text{ABCD}} B_0 dS \cos \alpha = B_0 \iint_{\text{ABCD}} dS \cos \alpha = B_0 S_{\text{ABCD}} \cos \alpha = B_0 x' l \cos \alpha$$

Soit au final :

$$\Phi' = x' l B_0 \cos \alpha$$

II.2. En reprenant la question du paragraphe I, sur le courant i , il suffit bien évidemment de remplacer le champ B_0 par $B_0 \cos \alpha$ et x par x' . Il vient donc :

$$i' = - \frac{l B_0 \cos \alpha}{R} \dot{x}'$$

II.3. L'ensemble des forces est schématisée sur la figure 2005.4.

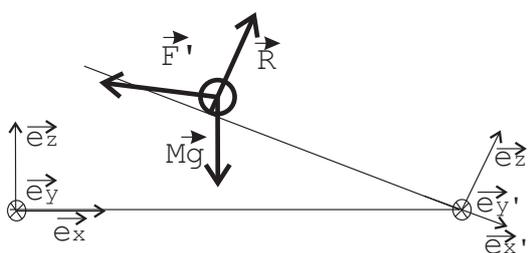


FIG. 2005.4 – Schéma des forces

II.4. La force \vec{F}' n'est rien d'autre que la force de Laplace qui s'exerce sur la barre dans cette nouvelle configuration. Soit :

$$\vec{F}' = \int_A^B i' d\vec{l} \wedge \vec{B}_0 = \int_A^B i' dl B_0 \quad \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = i' l B_0 \vec{e}_x$$

En remplaçant i' par son expression et exprimant \vec{e}_x dans la base $\{\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z'\}$. Il vient :

$$\vec{e}_x = \cos \alpha \vec{e}_x' + \sin \alpha \vec{e}_z' \text{ et } \vec{F}' = - \frac{l^2 B_0^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{x}' \vec{e}_x' - \frac{l^2 B_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{R} \dot{x}' \vec{e}_z'$$

II.5. On va projeter le principe fondamental de la dynamique sur la base $\{\vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z'\}$ qui permet de simplifier l'expression de la réaction \vec{R} . En effet la barre ne frotte pas, donc la composante R_x de \vec{R} sur \vec{e}_x' est nulle. On a donc le bilan des forces suivant :

$$\begin{aligned} \text{Le poids} & : M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z = +Mg \sin \alpha \vec{e}_x' - Mg \cos \alpha \vec{e}_z' \\ \text{La force de Laplace} & : \vec{F} = -\frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos \alpha}{R} \dot{x} \vec{e}_x = -\frac{B_0^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{x}' \vec{e}_x' - \frac{l^2 B_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{R} \dot{x}' \vec{e}_z' \\ \text{La réaction des rails} & : \vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z = R_y' \vec{e}_y' + R_z' \vec{e}_z' \end{aligned}$$

Le Principe Fondamental de la Dynamique projeté sur l'axe \vec{e}_x' devient alors :

$$M\ddot{x}' = Mg \sin \alpha - \frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{R} \dot{x}'$$

Soit

$$\ddot{x}' + \frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{RM} \dot{x}' = g \sin \alpha$$

qui est une équation différentielle à coefficient constant du premier ordre en \dot{x} et à second membre non nul et constant.

II.6. Résolution de cette équation :

1. On recherche tout d'abord une solution générale à l'équation homogène associée (SGEA), qui est l'équation où le second membre est nul. Cette équation a été résolue dans le premier paragraphe. La solution $Y(t)$ vérifie :

$$Y(t) = A \exp \left[-\frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{RM} t \right] \text{ où } A \text{ est une constante}$$

2. On cherche ensuite une solution particulière (SP) à l'équation totale ; la méthode générale est d'utiliser la variation de la constante. Cependant, dans la plupart des cas, une solution particulière est évidente. Cherchons par exemple une solution $P(t)$ qui vérifie que \dot{x} soit constante. Il vient immédiatement par l'équation différentielle qu'alors :

$$P(t) = \dot{x}' = \frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha$$

3. La solution cherchée est la somme de la SGEA et de la SP **qui vérifie les conditions initiales**. Soit

$$\dot{x}' = Y(t) + P(t) = A \exp \left[-\frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{RM} t \right] + \frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha \text{ avec } \dot{x}'(t=0) = v'_0$$

Pour déterminer A on écrit simplement la condition initiale soit :

$$\dot{x}'(t=0) = v'_0 = 0 = A + \frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha$$

donc :

$$A = -\frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha$$

Au final, la vitesse $\vec{v}' = \dot{x}' \vec{e}_x'$ est donc :

$$\vec{v}' = \frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha \left[1 - \exp \left[-\frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{RM} t \right] \right] \vec{e}_x'$$

II.7.

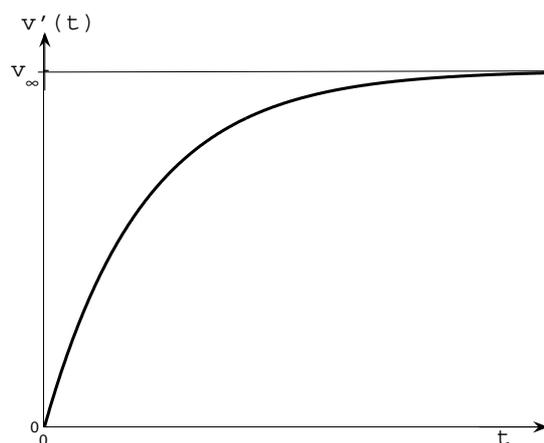
Lorsque le $t \rightarrow \infty$, alors le terme dans l'exponentielle tend vers 0. La vitesse $v'(t)$ sature à une valeur limite v_∞ telle que :

$$v_\infty = \frac{RM}{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha} g \sin \alpha$$

On peut donc réécrire la relation donnant $v'(t)$ sous la forme :

$$v'(t) = v_\infty \left[1 - \exp \left[-\frac{B_0^2 \cdot l^2 \cos^2 \alpha}{RM} t \right] \right] \vec{e}_x'$$

Ce comportement est schématisé sur la figure 2005.5.

FIG. 2005.5 – Allure de la courbe $v'(t)$

De façon qualitative, la force de Laplace se comporte comme une force de frottement fluide, proportionnelle à la valeur de la vitesse. Plus la barre va vite, plus la force qui s'oppose au déplacement de la barre est grande en intensité. On arrive donc à un phénomène de "saturation". Le phénomène analogue en mécanique est la chute d'un corps dans de l'air (ou de l'eau).

—

B THERMODYNAMIQUE

Attention à l'énoncé.

Il est demandé de s'intéresser et d'étudier comme système la masse m de gaz qui est contenu dans le cylindre quand celui-ci est en position de butée maximale. Ce qui signifie que l'énoncé indique qu'il faut étudier le système fermé composé par les $n = m/M$ molécules de gaz, initialement dans le réservoir 1, et qui, à la fin de l'étape I, sont dans le cylindre et occupe un volume $V_i = V_1$ à une pression P_1 et une température T_1 . A la fin de la transformation II, ce système fermé occupe un volume V_2 , à une pression P_2 et une température T_2 .

Ce système fermé occupe, dans le réservoir 1, avant la transformation I, un volume V défini par :

$$P_1 V = \frac{m}{M} R T_1$$

Après la transformation I, ce système occupe le volume V_1 , qui vérifie la loi des gaz parfaits dans le cylindre. Soit, puisque la température et la pression sont constantes :

$$P_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1 \text{ donc } V = V_1$$

Ce qui signifie que lors de la transformation I, le système fermé passe de l'état P_1, V_1, T_1 à l'état P_1, V_1, T_1 . Il ne change donc pas d'état. Il n'y a pas de transformation !! L'étape I n'est pas une transformation pour le système fermé.

Il en est de même pour l'étape III. Seule l'étape II est une réelle transformation qui modifie l'état du gaz. Dans ce problème, sauf pour la question II, nous étudierons le système fermé ainsi défini.

Il s'agit d'être vigilant sur le système étudié. En effet, l'énoncé ne le définit jamais clairement et propose comme variable d'étude le volume du cylindre, lorsque le piston s'y déplace. Ce volume n'est pas le volume du système fermé (sauf quand le piston est en butée arrière) mais définit le volume d'un système ouvert qui est la quantité de gaz contenu, à un instant quelconque dans le cylindre. Ces deux systèmes sont fondamentalement différents.

I. Etude énergétique des transformations

I.1. L'énoncé stipule que la compression du gaz est **réversible**. On s'intéresse au système fermé défini précédemment. La transformation II est donc **réversible** et **adiabatique** (le piston est calorifugé : pas d'échange de chaleur avec l'extérieur). La transformation II est donc une transformation qui suit la loi de **Laplace** :

$$P.T^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)} = \text{constante sur la transformation II.}$$

I.2. La figure 2005.6 schématise la transformation du gaz dans ses trois étapes I, II, III en fonction du **volume du cylindre** et non du volume du système fermé étudié.

L'étape I se fait à pression constante P_1 . L'étape II suit la loi de Laplace (PV^γ constant). L'étape III se fait à pression

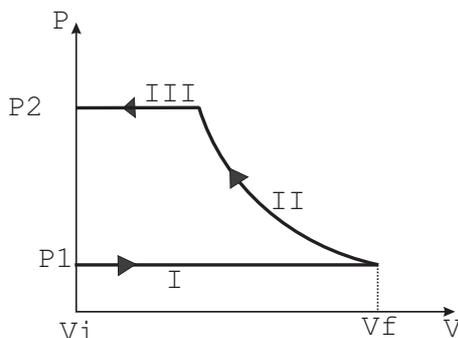


FIG. 2005.6 – Diagramme $P - V_i$ du compresseur

constante P_2 . Il faut noter que seulement pendant l'étape II, le volume du cylindre correspond au volume du système

fermé.

La figure 2005.7 représente la transformation **pour le système fermé**. Les Etapes I et III apparaissent sous forme de

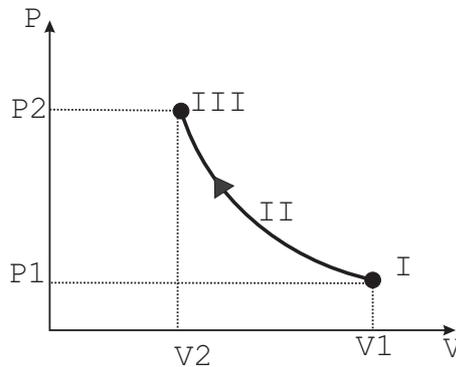


FIG. 2005.7 – Diagramme $P - V$ du système fermé

points puisque pendant ces étapes, ce système ne subit pas de transformation.

I.3. Attention ici aux termes de l'énoncé. La convention académique en thermodynamique est de spécifier le système étudié et d'analyser les échanges d'énergie du système avec l'extérieur. Les quantités sont **analytiques** (elles peuvent être positives ou négatives). On parle de travail ou de chaleur **échangés** par le système avec son extérieur. Ces quantités seront comptées positivement si elles sont **reçues** par le système et négativement si elles sont **cédées** par le système. Dans le cas de la transformation I, le travail échangé peut être **négatif** - ce qui signifie qu'il est **cédé** par le système gaz. Nous allons donc étudier le travail **échangé** par le gaz de masse m au cours des trois transformations et non le travail reçu.

Lors d'une transformation infinitésimale **quelconque**, le travail infinitésimal δW , des forces de pression, échangé par le gaz est :

$$\delta W = -P_{\text{ext}}dV \text{ où } P_{\text{ext}} \text{ est la pression extérieure}$$

Dans le cas d'une transformation réversible, le gaz est à **l'équilibre** en tout point de la transformation. Alors, $P_{\text{ext}} = P$. Il vient pour ce type de transformation :

$$\delta W = -PdV$$

Le travail échangé W pendant une transformation **macroscopique** où le volume initial du gaz est V^{ini} et le volume final V^{fin} est :

$$W = - \int_{V^{\text{ini}}}^{V^{\text{fin}}} P dV$$

Nous allons utiliser cette relation pour les trois transformations :

- étape I : La pression du gaz est constante et vaut P_1 , donc :

$$W_I = -P_1 (V^{\text{fin}} - V^{\text{ini}})$$

Il reste à déterminer V^{fin} et V^{ini} . V^{ini} est le volume occupé par une masse m de gaz parfait (soit m/M moles) à la pression P_1 et température T_1 . V^{fin} est le volume occupé par la même masse m dans les mêmes conditions de pression et température. donc :

$$V^{\text{fin}} = V^{\text{ini}} = \frac{mRT_1}{MP_1}$$

D'où

$$W_I = 0$$

Une façon plus élégante de montrer ce résultat consiste à utiliser le premier principe, pour la masse m de gaz parfait.

Pour ce type de gaz l'énergie interne ne dépend que de la température. Pour une transformation **isotherme**, la variation d'énergie interne est nulle. Pour une transformation **isotherme** et **calorifugée** (quantité de chaleur échangée nulle), on a donc :

$$\Delta U = 0 = W + Q = W + 0 = W \text{ soit } W = 0$$

- étape II : Pour une transformation de gaz parfait, la variation d'énergie interne ne dépend que de la variation de température, soit ici :

$$\Delta U = mC_v\Delta T = mC_v(T_2 - T_1)$$

où C_v est la capacité calorifique massique du gaz parfait à volume constant.

D'autre part

$$\Delta U = Q + W = W \text{ car la transformation est adiabatique}$$

Soit

$$W_{II} = \frac{m}{M}c_{v,m}(T_2 - T_1)$$

- étape III : On a le même type de transformation que l'étape I. Il vient donc :

$$W_{III} = W_I = 0$$

I.4. W_{II} est l'intégrale $\int -PdV$. Graphiquement, il est donc représenté, dans le diagramme $P - V$, par l'aire limitée par la courbe représentative $P(V)$ pour la transformation II et les deux segments verticaux où le volume V correspond aux volumes de début et de fin de la transformation II. Cette aire algébrique est représentée sur la figure 2005.8.

L'aire grisée correspond à la valeur algébrique du travail, si on parcourt le volume dans le sens des doubles flèches (à

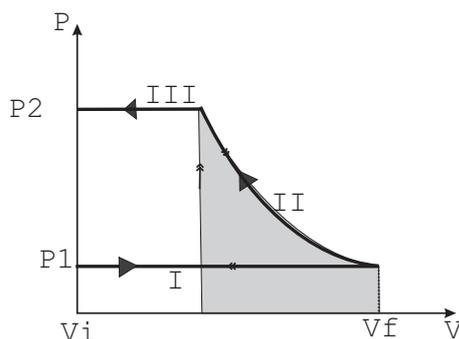


FIG. 2005.8 – Représentation graphique de W_{II}

cause du signe '-' dans l'expression du travail).

Le travail total échangé pendant la compression est représenté par l'aire contenue dans les trois courbes représentatives des trois transformations. Puisque $W_I = W_{III} = 0$, le travail total échangé est donc le travail échangé (reçu) lors de l'étape II.

I.5. Par unité de masse, en utilisant le résultat de la question 3, le travail total échangé est :

$$w = \frac{W_I + W_{II} + W_{III}}{m} = \frac{W_{II}}{m} = \frac{c_{v,m}}{M}(T_2 - T_1)$$

I.6. Comme indiqué à la question 3, cette expression n'est rien d'autre que la variation d'énergie interne Δu massique de la masse de gaz m passant de R_1 à R_2 . Soit :

$$\Delta u = w = \frac{c_{v,m}}{M}(T_2 - T_1)$$

I.7. Une transformation de gaz parfait réversible adiabatique suit la loi de transformation de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

Soit exprimée en Pression et Température :

$$P.T^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)} = \text{constante}$$

d'où

$$P_1.T_1^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)} = P_2.T_2^{\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)}$$

Il vient donc :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma} - 1}$$

I.8. Application numérique :

$$T_2 = 300 \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{1,4} - 1} \sim 411 \text{ K}$$

Pour calculer numériquement w , il nous faut connaître $c_{v,m}$ molaire qui n'est pas donné. pour cela on utilise une des relations de Mayer :

$$c_{p,m} - c_{v,m} = R \text{ soit } c_{v,m} (\gamma - 1) = R \Rightarrow c_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

L'expression obtenu à la question 5 devient :

$$w = \frac{R}{M(\gamma - 1)} (T_2 - T_1) = \frac{8,32}{29.10^{-3}(1,4 - 1)} (411 - 300) \sim 79,6 \text{ kJ/ kg}$$

I.9. Le second principe nous indique que pour une transformation infinitésimale **réversible**, la variation d'entropie dS est :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Si la transformation est en plus isotherme, en intégrant sur toute la transformation, il vient :

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Comme ici la transformation est adiabatique : $Q = 0$, on a donc

$$\Delta s = 0$$

La transformation est **isentropique**

II. Compresseurs et détendeurs

II.1. On peut répondre à cette question de deux façons :

1. La variation infinitésimale d'enthalpie dH s'écrit de façon générale :

$$dH = \delta Q + V dP$$

Si la transformation se fait dans une enceinte calorifugée :

$$\delta Q = 0 \text{ et } dH = V dP$$

On a donc pour ce type de transformation macroscopique :

$$\Delta H = \int V dP$$

Pour un compresseur $dP > 0$ et le volume $V > 0$. Donc, a priori cette intégrale sera toujours positive pour un système de compresseur. ΔH ne sera pas nul.

En toute rigueur, un compresseur isenthalpique ne peut donc pas être calorifugé

2. Examinons une transformation de modification de pression adiabatique. La transformation étant adiabatique, l'entropie échangée dS_e avec l'extérieur est nulle. La seule variation d'entropie est celle créée par irréversibilité ; on la note dS_i et elle est positive ou nulle (2nd principe). L'identité thermodynamique (Attention la température ici est la température thermodynamique définie par cette relation justement) nous donne alors :

$$dH = T dS + V dP \text{ et puisque } dS = dS_e + dS_i = dS_i$$

Il vient donc :

$$dH = TdS_i + VdP$$

Considérons que $dH = 0$. Il vient donc :

$$VdP = -TdS_i \leq 0 \Rightarrow dP \leq 0$$

Cette transformation ne peut être isenthalpique **uniquement** que si la pression décroît. Ça doit donc être une détente. Ça ne peut pas être une compression. On voit de plus que si la transformation est **isentropique**, la variation de pression est nulle.

II.2. La détente de **Joule-Thomson**, présentée dans cette question, est comme son nom l'indique une détente. Cette transformation est l'exemple d'une transformation qui peut être considérée comme **quasi-statique** (le gaz s'écoule lentement dans la paroi poreuse) mais fondamentalement **irréversible**. Le gaz dans le réservoir 2 va naturellement se déplacer vers le réservoir 1 de pression inférieure. Il est impossible qu'il suive naturellement le chemin inverse.

Pour que cette transformation soit isenthalpique, il est nécessaire de faire l'hypothèse que le travail échangé par le gaz pendant la transformation est **uniquement** lié aux forces de pression des deux réservoirs de pression 1 et 2. Autrement dit, le travail qu'échange le gaz avec le milieu poreux est négligeable devant celui des forces de pression. Il faut donc que le gaz s'écoule lentement dans le tube. Le rapport des pressions entre les deux côtés du tube n'excède pas, dans la pratique, quelques unités.

—

C ELECTRODINÉMIQUE

I. Filtre Passe-Bande

I.1.

I.1. 1. Il s'agit d'un montage en série : l'impédance complexe du dipôle AB est la somme des impédances complexes de chacun des dipôles qui le constitue, soit :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R$$

I.1. 2. On reconnaît un diviseur idéal de tension :

$$\underline{u}_s = R\underline{i} = R \frac{\underline{u}_e}{\underline{Z}_{AB}} = R\underline{u}_e \frac{1}{\left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R\right)}$$

Finalemment :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{R}{\left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R\right)}$$

I.2. $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$; $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$; $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ Simplifiant par R l'expression de \underline{H} , il vient :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{j\left(\frac{-1}{RC\omega} + \frac{L}{R}\omega\right) + 1} \\ &= \frac{1}{j\left(\frac{-Q\omega_0}{\omega} + \frac{Q}{\omega_0}\omega\right) + 1} \\ &= \frac{1}{j\left(\frac{-Q}{x} + Qx\right) + 1} \\ &= \frac{1}{jQ\left(\frac{-1}{x} + x\right) + 1} \end{aligned}$$

I.2. 1. Le déphasage $\varphi(x)$ est donné par la relation :

$$\tan \varphi = \frac{\Im(\underline{H})}{\Re(\underline{H})}$$

Soit :

$$\tan \varphi = -\left(\frac{-1}{x} + x\right)$$

Les deux signaux d'entrée et sortie sont en phase lorsque le déphasage φ entre eux est nul, soit lorsque $\tan \varphi = 0$.

$$\tan \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x} + x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Les signaux sont en phase lorsque $x = 1$.

I.2. 2. Le module G de la fonction de transfert est :

$$G = \frac{1}{\left[Q^2\left(\frac{-1}{x} + x\right)^2 + 1\right]^{1/2}}$$

Quelque soit la valeur de Q, $Q^2\left(\frac{-1}{x} + x\right)^2 \geq 0$ donc :

$$\left[Q^2\left(\frac{-1}{x} + x\right)^2 + 1\right]^{1/2} \geq 1 \text{ donc } G \leq 1$$

G est donc maximum à la valeur $G_{\max} = 1$. Cette valeur s'obtient lorsque le dénominateur vaut 1, soit pour $x = 1$.

I.3.

I.3. 1. Il faut déterminer la valeur de x pour laquelle $G = G_{\max}/\sqrt{2}$.

$$G = G_{\max}/\sqrt{2} \Leftrightarrow G^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[Q^2 \left(\frac{-1}{x} + x \right)^2 + 1 \right] = 2$$

On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles :

$$Q^2 \left(\frac{-1}{x} + x \right)^2 = 1$$

Soit :

$$\frac{-1}{x} + x = \pm \frac{1}{Q} \Leftrightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

On a donc deux équations du second ordre à résoudre (selon le signe du terme en x). Ce qui nous amène à considérer 4 solutions x_1, x_2, x_3, x_4 . Le discriminant Δ est le même pour les deux équations du second ordre :

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \geq 2$$

Les 4 solutions sont donc :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ x_2 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ x_3 = \frac{1}{2Q} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ x_4 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \end{cases}$$

Comme $\sqrt{\Delta} \geq 2$, il vient :

$$x_1 \leq 0; x_2 \geq 0; x_3 \leq 0; x_4 \geq 0$$

Les deux seules solutions acceptables sont les solutions positives, soit x_2 et x_4 . Pour $x \in [x_2, x_4]$, la valeur de G est supérieure à $G_{\max}/\sqrt{2}$. Il vient donc :

$$\Delta x = x_4 - x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} = \frac{1}{Q}$$

En pulsation cette relation devient :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

La bande passante $\Delta\omega$ est inversement proportionnelle à Q . Plus Q est élevé, plus $\Delta\omega$ est faible et le filtre sélectif. Pour L et C fixes (soit aussi pour ω_0 donné), Q ne dépend que de la résistance R . Plus la résistance est élevée, moins bon est le facteur de qualité.

I.3. 2. Cet argumentaire est schématisé sur la figure 2005.9.

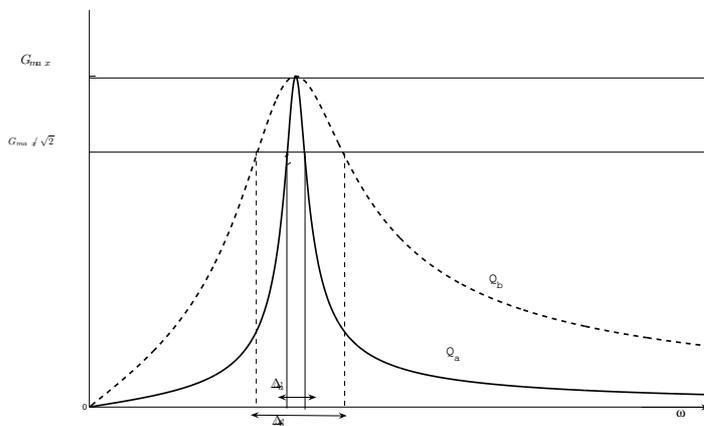


FIG. 2005.9 – Evolution de G en fonction de ω - Bande passante

II. Détermination des caractéristiques de la bobine

II.1.

Il est absolument nécessaire ici d'expliquer comment on obtient les valeurs numériques, d'autant plus qu'elles ne sont pas toutes clairement définies dans l'énoncé.

1. **Période T** : C'est l'intervalle de temps qui séparent deux points de valeurs et de dérivées identiques sur une des deux courbes. On peut prendre par exemple le passage par 0 croissant de la voie I. On trouve grâce à l'échelle $T = 4.10^{-3}$ s.

2. **La pulsation** : ω est donnée par la relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4.10^{-3}} \sim 1571 \text{ rad/s}$$

3. **L'amplitude** U_m est l'amplitude de la tension (valeur maximale) de la voie II. Soit avec l'échelle utilisée, on lit sur l'oscillogramme : $U_m = 8$ V

4. **L'amplitude** I_m est l'amplitude du courant I qui traverse la résistance R. Soit U_I l'amplitude de la tension aux bornes de la voie I. On lit sur le diagramme $U_I = 4$ V. Par la loi d'Ohm, il vient :

$$U_I = RI_m \text{ soit } I_m = \frac{U_I}{R} = \frac{4}{20} \sim 0,2 \text{ A}$$

5. **L'impédance réelle** Z_{AB} : Là, il y a un problème de nomenclature. Une impédance complexe possède une partie réelle et une partie imaginaire. On définit donc la **partie réelle**, la **partie imaginaire** et le **module** (qui est réel) de l'impédance complexe. La notion d'impédance réelle n'est pas académique et devrait être définie dans l'énoncé. Ce dernier est donc ambigu quant à la quantité physique dont il est question. Il faut donc spécifier clairement quelle quantité on met dans le tableau de valeur.

La partie réelle de Z_{AB} n'est rien d'autre que R qui est donnée dans l'énoncé et qui a été utilisée pour calculer I_m . Il n'y a donc pas d'intérêt à la placer dans le tableau. On décide donc ici, que l'on donne le **module** de l'impédance complexe. La loi d'Ohm sur les amplitudes complexes s'écrit aux bornes AB :

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB}\underline{I} \Rightarrow |U_{II}| = |Z_{AB}||I| \Rightarrow U_m = |Z_{AB}|I_m \text{ soit } |Z_{AB}| = U_m/I_m = 8/0.2 = 40 \Omega$$

Grandeur	T(s)	ω (rad/s)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique	4.10^{-3}	1571	0,2	8	40

II.2. U_{II} est maximale en $t = 0$, alors que U_I passe à son maximum à $t = 5.10^{-4}$ s. Donc U_{II} est en **avance** de $\delta t = 5.10^{-4}$ s sur U_I

II.3. Le déphasage φ entre les deux tensions est l'écart temporel exprimé en angle. Si la période T équivaut à un déphasage de 2π , un écart de temps δt équivaut à un déphasage $\varphi = \frac{2\pi\delta t}{T}$.

$$\varphi = \frac{2\pi\delta t}{T} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi \cdot 5.10^{-4}}{4.10^{-3}} \sim 0,78 \text{ rad} = 45 \text{ deg}$$

II.4. D'un point de vue théorique, le schéma électrique proposé a pour impédance complexe :

$$\underline{Z}_{AB} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Le déphasage ϕ qu'induit une telle impédance est défini par :

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z_{AB}|}; \quad \sin \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|Z_{AB}|}; \quad \tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

D'après les valeurs du tableau de la question 1, on devrait observer un déphasage tel que :

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z_{AB}|} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ soit } \phi = \pi/3 \text{ rad} = 60 \text{ deg}$$

Or nos mesures donnent un déphasage de 45 deg. Donc le schéma électrique ne correspond pas à la réalité du montage. Il y a quelque chose en plus dans le montage réel (en fait la bobine n'est pas idéale et possède une résistance interne r).

II.5. On tient compte dorénavant de la résistance interne r de la bobine. L'impédance complexe de la bobine est donc $r + jL\omega$ et l'impédance complexe \underline{Z}_{AB} devient donc :

$$\underline{Z}_{AB} = R + r + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

Le déphasage ϕ vérifie donc :

$$\cos \phi = \frac{R+r}{|Z_{AB}|}; \quad \sin \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|Z_{AB}|}; \quad \tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$$

On a donc :

$$r = |Z_{AB}| \cos \phi - R \text{ soit } r = 40 \cos(0,78) - 20 \sim 8,4 \Omega$$

II.6. Il suffit alors d'utiliser par exemple le sinus du déphasage :

$$\sin \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|Z_{AB}|} \Rightarrow L = \frac{|Z_{AB}|}{\omega} \sin \phi + \frac{1}{C\omega^2}$$

Il vient numériquement :

$$L = \frac{40}{1571} \sin(0,78) + \frac{1}{10^{-5} \cdot 1571^2} = 5,8 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

— FIN —

Epreuve de 2006

A ELECTROKINÉTIQUE

I. Générateurs : passage entre modèles équivalents de Thévenin et Norton

Considérons le montage de la figure 1 représentant un générateur de courant. Le courant i_r qui passe dans la résistance r est d'après la loi des nœuds :

$$i_r = i - \eta$$

La loi d'Ohm dans la résistance r donne (attention aux conventions de signes) pour la différence de potentiel u :

$$u = u_{AB} = -r i_r = -r(i - \eta) = r\eta - r i \quad (2006.1)$$

Considérons à présent le montage de la figure 2. Si l'on applique la loi des mailles entre les points A et B et la loi d'Ohm aux bornes de la résistance R , il vient :

$$u = u_{AB} = E - R i \quad (2006.2)$$

On souhaite que ces deux générateurs soient équivalents. C'est à dire que pour une même différence de potentiel u entre leurs bornes, le courant i qui les traverse soit le même. Cette condition est réalisée lorsque les deux équations (2006.1) et (2006.2) sont égales, soit :

$$r\eta - r i = E - R i$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toutes les valeurs du courant i , en particulier pour $i = 0$. Il vient alors :

$$E = \eta r$$

Et par la suite l'égalité entre les résistances :

$$R = r$$

L'équivalence entre les deux générateurs est obtenue pour :

$$\begin{cases} E = \eta r \\ R = r \end{cases}$$

II. Association de générateurs

Notons i_1 et i_2 les deux courants qui partent dans chaque générateur de courant, i'_1 et i'_2 les courants respectifs passant dans les résistances r_1 et r_2 , C et D les deux points de jonction des résistances et des générateurs idéaux pour chacun des deux générateurs. Toutes ces quantités sont représentées sur la figure 2006.1 Pour répondre à la question, nous allons exprimer la différence de potentiel u en fonction du courant i et des données des deux générateurs.

– Sur le générateur 1, la **loi des nœuds** au point C donne :

$$i'_1 = i_1 - \eta_1$$

La loi d'Ohm nous donne (attention aux conventions de signe!)

$$u_{AB} = -r_1 i'_1 = -r_1(i_1 - \eta_1) = r_1\eta_1 - r_1 i_1 \quad (2006.3)$$

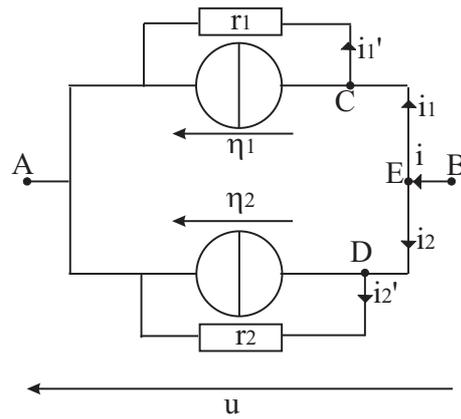


FIG. 2006.1 – Association de deux générateurs de courant

– De façon analogue, il vient pour le générateur 2 :

$$i_2' = i_2 - \eta_2$$

et

$$u_{AB} = -r_2 i_2' = -r_2 (i_2 - \eta_2) = r_2 \eta_2 - r_2 i_2 \quad (2006.4)$$

En égalant les deux équations (2006.3) et (2006.4), il vient :

$$r_1 \eta_1 - r_1 i_1 = r_2 \eta_2 - r_2 i_2$$

D'autre part, la loi des nœuds au point E donne :

$$i = i_1 + i_2 \text{ soit } i_1 = i - i_2$$

En remplaçant i_1 par son expression en fonction de i et i_2 , il vient :

$$r_1 \eta_1 - r_1 i + r_1 i_2 = r_2 \eta_2 - r_2 i_2$$

Ce qui donne pour i_2 :

$$i_2 = \frac{r_2 \eta_2 - r_1 \eta_1 + r_1 i}{r_1 + r_2}$$

En utilisant cette expression de i_2 dans l'équation (2006.4), il vient :

$$\begin{aligned} u = u_{AB} &= -r_2 \left[\frac{r_2 \eta_2 - r_1 \eta_1 + r_1 i}{r_1 + r_2} - \eta_2 \right] \\ &= \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} [\eta_1 + \eta_2 - i] \end{aligned}$$

D'après le paragraphe I, cette dernière équation est celle que vérifie la différence de potentiel aux bornes d'un générateur de courant de résistance interne $r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ et de courant nominal $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

On remarque que dans cette association de générateurs de courants, les courants nominaux sont additionnés alors que les résistances internes sont mises en parallèle. Ce générateur est donc équivalent au schéma de la figure 2006.2.

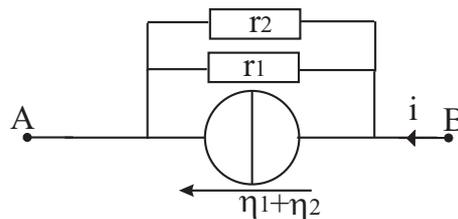


FIG. 2006.2 – Schéma équivalent du montage en parallèle

III. Montage diviseur de tension et montage diviseur de courant

III.1. Si l'on note I le courant circulant dans les deux résistances de A vers B , la loi d'Ohm nous donne

$$u = u_{AB} = R_1 I + u_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

Or

$$u_2 = R_2 I$$

Il vient donc :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

Relation connue sous le nom de relation du diviseur idéal de tension

III.2. La loi des nœuds nous donne :

$$i = i_1 + i_2$$

La loi d'Ohm donne :

$$u = R_1 i_1 = R_2 i_2$$

On a donc

$$R_1 (i - i_2) = R_2 i_2$$

Soit

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

i_2 est une fraction du courant i , qui ne dépend que de la valeur des résistances. Cette fraction est de rapport inférieur à 1. Le courant i est divisé.

IV. Intensité i du courant qui circule dans une branche d'un circuit

IV.1. Définissons sur la figure 2006.3 les quantités algébriques i_1, i_2, i_R, U_{GK} , et U_{AB} .

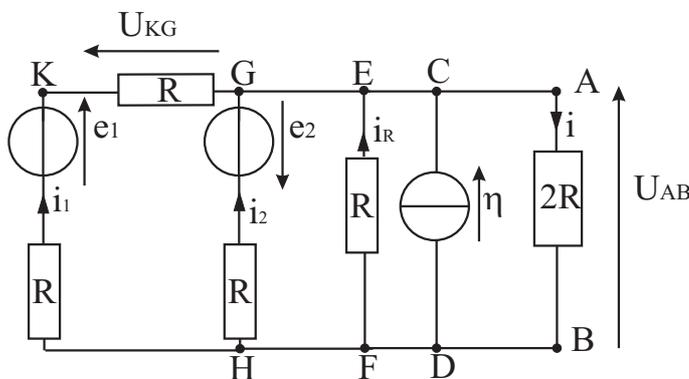


FIG. 2006.3 – Notations et conventions de signe pour les courants et tensions

La loi des nœuds appliquée au point A permet d'exprimer le courant i en fonction des autres courants dans les différentes branches :

$$i = \eta + i_1 + i_2 + i_R \tag{2006.5}$$

Il s'agit, pour répondre à la question d'exprimer chacun des courants en fonction des données du circuit (résistance, fem, cem).

– La loi des mailles sur le circuit :

$$U_{AB} = U_{CD} = U_{EF} = U_{GH} = U_{KB}$$

– La loi d'Ohm sur le brin AB :

$$U_{AB} = 2R i$$

– La loi d'Ohm sur le brin EF :

$$U_{EF} = R i_R = U_{AB} = 2R i \Rightarrow i_R = 2i$$

– La loi d’Ohm sur le brin GH :

$$U_{GH} = -e_2 - R i_2 = U_{AB} = 2R i \quad \Rightarrow \quad i_2 = -\frac{e_2}{R} - 2i$$

– La loi d’Ohm sur le brin HKG :

$$U_{GH} = U_{GK} + U_{KH} = -U_{KG} + U_{KH} = e_1 - R i_1 - R i_1 = U_{AB} = 2R i \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{e_1}{2R} - i$$

En substituant les expressions établies pour i_1, i_2, i_R dans l’équation (2006.5), il vient :

$$i = \eta + \frac{e_1}{2R} - i - \frac{e_2}{R} - 2i + 2i$$

Soit

$$\boxed{i = \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2R} \left[\frac{e_1}{2} - e_2 \right]}$$

IV.2. Application Numérique

$$i = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} + \frac{1}{2 \times 50} \left[\frac{20}{2} - 5 \right] = 6 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

Remarque : Il est toujours important de faire l’application numérique. En effet, l’expression obtenue est relativement simple. Le temps passé à l’établir est bien plus long que celui demandé pour faire une application numérique basique. Le bonus obtenu dans le cadre d’un concours peut se révéler très intéressant au niveau des points recueillis.

—

B THERMODYNAMIQUE

I. Généralités

I.1. L'équation fondamentale de la statique des fluides est donnée dans l'énoncé :

$$\vec{\text{grad}}P = \rho \vec{\mathbf{g}} \tag{2006.6}$$

Le gradient de la pression a pour expression, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}}P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{g}}$ a pour expression, si le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_z$ unitaire de la base orthonormée directe du repère cartésien basé au niveau du sol est ascendant :

$$\vec{\mathbf{g}} = -g\vec{\mathbf{e}}_z$$

En insérant ces deux expressions dans l'équation (2006.6), il vient le jeu des trois équations suivantes :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Le problème est invariant par translation selon x ou y . Les quantités étudiées ne dépendent que de la cote z . Les dérivées partielles selon z deviennent donc des dérivées totales et la dernière équation devient donc :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g} \tag{2006.7}$$

I.2. Un Gaz Parfait, occupant un volume V , constitué de n moles de matière, étant à la pression P et à la température T , obéit à la loi d'état de Boyle-Mariotte :

$$PV = n\mathcal{R}T$$

où \mathcal{R} est la constante des gaz parfaits, aussi appelée, constante de Mariotte.

I.3. Soit une masse m de gaz parfait à la pression P , à la température T . D'après la question précédente, elle occupe un volume V à l'équilibre tel que :

$$V = \frac{m}{\overline{M}} \mathcal{R} \frac{T}{P}$$

Sa masse volumique ρ est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\overline{M}P}{T\mathcal{R}}$$

Si la température et la pression sont des fonctions de z , il vient alors naturellement :

$$\boxed{\rho(z) = \frac{\overline{M}P(z)}{\mathcal{R}T(z)}} \tag{2006.8}$$

Application numérique : Au niveau de la mer si l'on prend les valeurs standards, à savoir :

$$P(0) \sim 10^5 \text{ Pa} \quad T(0) \sim 300 \text{ K} \quad \overline{M} \sim 29.10^{-3} \text{ kg/mol} \quad \mathcal{R} \sim 8,3 \text{ J/(mol. K)}$$

Il vient :

$$\rho(0) = \frac{29.10^5}{8,3 \times 300} \sim 1,2 \text{ kg/ m}^3$$

L'air a donc une masse volumique moyenne à peu près 1000 fois plus faible que l'eau dans les mêmes conditions.

II. Premier modèle

II.1. La température du gaz est considérée comme constante et valant T_0 . En insérant l'équation(2006.8) dans l'équation (2006.7), il vient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\overline{M}g}{\mathcal{R}T_0} P(z)$$

En utilisant les notations de l'énoncé et en réécrivant l'équation, il vient :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H}$$

Relation que l'on intègre entre $z = 0$ et $z = Z$:

$$\begin{aligned} \int_{z=0}^{z=Z} \frac{dP}{P} &= - \int_{z=0}^{z=Z} \frac{dz}{H} \\ \Rightarrow [\ln(P(z))]_{z=0}^{z=Z} &= - \left[\frac{z}{H} \right]_{z=0}^{z=Z} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{P(Z)}{P_0}\right) &= -\frac{Z}{H} \end{aligned}$$

En prenant l'exponentielle de cette dernière relation, il vient :

$$\boxed{P(Z) = P_0 \exp\left[-\frac{Z}{H}\right]} \tag{2006.9}$$

C'est une fonction à décroissance exponentielle dont la distance caractéristique de variation est H .

II.2. Soit S_e le seuil de variation relative de la pression à partir du quel on considère que cette dernière est constante. L'énoncé donne $S_e = 10^{-2}$. La côte z_1 à partir de laquelle, on va considérer la variation de pression est donc :

$$\left| \frac{P(z_1) - P_0}{P_0} \right| = S_e$$

Puisque $P(z)$ est un fonction décroissante de z , cette dernière relation devient :

$$1 - \frac{P(z_1)}{P_0} = S_e \Rightarrow P(z_1) = P_0(1 - S_e)$$

Soit en utilisant la relation (2006.9), il vient :

$$P_0 \exp\left[-\frac{z_1}{H}\right] = P_0(1 - S_e) \Rightarrow z_1 = -H \ln(1 - S_e)$$

Puisque $S_e = 10^{-2}$, il vient :

$$\boxed{z_1 = H \ln(0,99) \sim 10^{-2} \times H}$$

II.3. Application numérique

$$H = \frac{\mathcal{R}T_0}{\overline{M}g} = \frac{8,3 \times 300}{29.10^{-3} \times 9,8} \sim 8500 \text{ m}$$

A ce stade, on peut tout de suite voir les limites de ce modèle isotherme. En effet, l'atmosphère de la Terre n'a pas une température moyenne constante sur une telle altitude. Par exemple les avions de ligne qui circulent à des altitudes comprises entre 8000 et 12000 mètres sont plongés dans des températures extérieures de l'ordre de 220 K.

Il vient pour z_1 :

$$z_1 \sim 85 \text{ m}$$

III. Second modèle

Pour palier aux inconvénients du modèle isotherme de température, on peut modéliser la variation de température de l'atmosphère par une fonction simple, la fonction affine. Si l'on suppose que :

$$T(z) = T_0 + \lambda z = T_0 \left(1 + \frac{\lambda}{T_0} z\right)$$

Utilisant les équations (2006.7) et (2006.8), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= -\frac{\overline{M}g}{\mathcal{R}T(z)} P(z) \\ &= -\frac{\overline{M}g}{\mathcal{R}(T_0 + \lambda z)} P(z) \\ &= -\frac{P(z)}{H\left(1 + \frac{\lambda}{T_0}z\right)} \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$H \frac{dP}{P(z)} = -\frac{dz}{\left(1 + \frac{\lambda}{T_0}z\right)}$$

En intégrant cette équation entre $z = 0$ et $z = Z$, il vient :

$$H \ln \left[\frac{P(Z)}{P_0} \right] = - \int_{z=0}^{z=Z} \frac{dz}{\left(1 + \frac{\lambda}{T_0}z\right)} = - \left[\frac{T_0}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{\lambda}{T_0}z \right) \right]_{z=0}^{z=Z}$$

Soit :

$$H \ln \left[\frac{P(Z)}{P_0} \right] = -\frac{T_0}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{\lambda}{T_0}Z \right)$$

En utilisant les propriétés des logarithmes :

$$\ln \left[\frac{P(Z)}{P_0} \right] = \ln \left[\left(1 + \frac{\lambda}{T_0}Z \right)^{-\left(\frac{T_0}{\lambda H} \right)} \right]$$

Soit finalement :

$$\boxed{P(Z) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{T_0}Z \right)^{-\left(\frac{T_0}{\lambda H} \right)}}$$

Remarques : Cette expression est une loi de puissance, type de loi utilisée fréquemment en physique. Cependant, il convient d'être très attentif à son utilisation et son domaine de validité.

En effet, une caractéristique essentielle de la pression atmosphérique est qu'elle décroît avec l'altitude. Pour que ce comportement reste vrai dans l'expression que l'on vient d'établir, il faut que le coefficient λ soit positif. Ce qui signifie qu'on modélise une atmosphère dont la température croît elle aussi avec l'altitude. Or cette situation n'est clairement pas celle que l'on connaît au niveau de la mer. En fait cela correspond aux tranches élevées de l'atmosphère terrestre (troposphère, ionosphère, et au delà) où le rayonnement solaire joue un rôle essentiel dans la température de l'air.

Pour finir cette remarque, disons que l'équilibre de pression et de température de l'atmosphère terrestre est un problème délicat à traiter. Il faut tenir compte de plusieurs phénomènes concomitants et étroitement liés. Les modèles de masses volumiques doivent tenir compte des flux de chaleur par rayonnement et de la convection naturelle dans l'atmosphère. C'est une étude qui couple la dynamique des fluides et la thermodynamique.

—

C OPTIQUE ONDULATOIRE

I. Etude du champ d'interférences au niveau du plan (P), sur l'axe Oz

I.1. Sur la figure 2006.4 sont représentés les rayons (1) et (2) issus de S, passant par S₁ et S₂ et interférant en M en traits épais avec une triple flèche. Puisque M est dans le plan focal image de la lentille L₂, deux rayons quelconques

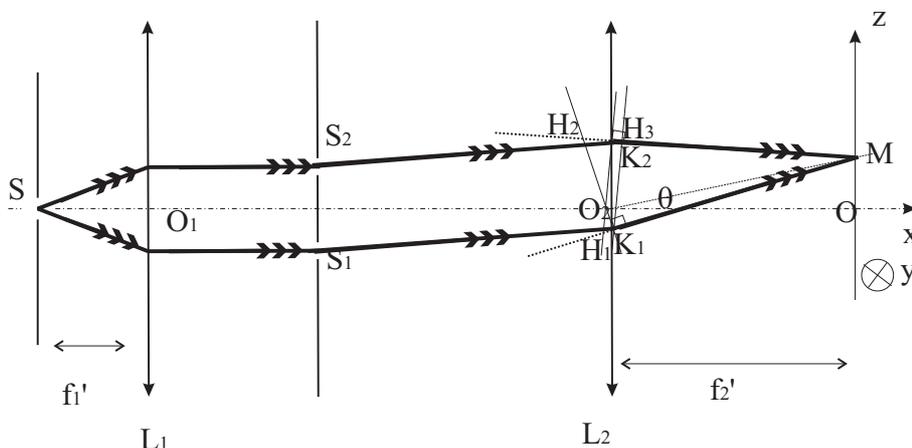


FIG. 2006.4 – Rayons lumineux interférant en M et différence de marche

interférant en M, sont issus de deux rayons parallèles avant la lentille L₂. Pour tracer les rayons (1) et (2), on trace un rayon passant par S₁. Il intercepte L₂ en un point K₁. On trace ensuite le rayon parallèle à S₁K₁ qui passe par S₂. Il intercepte la lentille L₂ au point K₂. Pour tracer les rayons (1) et (2) avant la lentille L₁, il suffit de remarquer que S est dans le plan focal objet de L₁. Ce qui signifie que tous les rayons issus de S sortent de L₁ parallèlement à l'axe optique, en particulier donc ceux qui passent par S₁ et S₂.

I.2. La lentille L₂ ne rajoutant pas de différence de marche entre les deux rayons (si elle est correctement utilisée dans les conditions de Gauss), la différence de chemin optique entre les rayons (1) et (2) est simplement la différence entre les distances K₁M et K₂M. Soit :

$$\delta(M) = |K_2M - K_1M|/\lambda_0$$

Sur la figure on peut représenter cette différence de plusieurs manières. On peut reporter la distance K₁M sur le segment K₂M avec un compas.

Ici, on a choisit de faire figurer le plan de phase des vibrations des rayons (1) et (2). En K₁, on trace la perpendiculaire à K₁M. Cette droite coupe le rayon (2) en H₂. En K₂, on trace la perpendiculaire à K₂M, elle coupe le rayon (1) en H₁. La différence de chemin optique entre (1) et (2) est la somme K₂H₂ + K₁H₁. Pour visualiser cette distance, on trace la parallèle à K₂H₁ qui passe par K₁. Cette droite coupe K₂M en H₃. La différence de chemin optique est alors la distance H₂H₃ sur la droite K₂M.

I.3. A la question précédente, on a vu que :

$$\delta(M) = |K_2M - K_1M|/\lambda_0$$

Nous allons faire ici l'hypothèse que nous ne nous intéressons que aux points M situés sur l'axe Oz (y = 0).

Il nous faut donc exprimer = |K₂M - K₁M| en fonction des données de l'énoncé. Pour cela, on a deux méthodes au choix.

1. **Première méthode : Calcul direct.** On utilise un calcul vectoriel qui permet d'exprimer K₂M et K₁M en fonction des données de l'énoncé.

$$\begin{aligned} \vec{K_1M} &= \vec{K_1O_2} + \vec{O_2O} + \vec{OM} \\ \Rightarrow K_1M^2 &= K_1O_2^2 + O_2O^2 + OM^2 + 2\vec{K_1O_2} \cdot \vec{O_2O} + 2\vec{K_1O_2} \cdot \vec{OM} + 2\vec{O_2O} \cdot \vec{OM} \end{aligned} \quad (2006.10)$$

Or $\overrightarrow{O_2O}$ est orthogonal à \overrightarrow{OM} et aussi à $\overrightarrow{K_1O_2}$, donc :

$$\overrightarrow{O_2O} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O_2O} \cdot \overrightarrow{K_1O_2} = 0$$

D'autre part :

$$O_2O^2 = f_2'^2 \text{ et } OM^2 = z^2$$

L'équation (2006.10) devient donc :

$$K_1M^2 = K_1O_2^2 + f_2'^2 + z^2 + 2\overrightarrow{K_1O_2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Par un raisonnement identique, il vient :

$$K_2M^2 = K_2O_2^2 + f_2'^2 + z^2 + 2\overrightarrow{K_2O_2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

La différence de ces deux expressions amène à :

$$K_1M^2 - K_2M^2 = K_1O_2^2 - K_2O_2^2 + 2\overrightarrow{K_1O_2} \cdot \overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{K_2O_2} \cdot \overrightarrow{OM} = K_1O_2^2 - K_2O_2^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{K_1K_2}$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{K_1O_2} = \overrightarrow{K_1K_2} + \overrightarrow{K_2O_2} \implies K_1O_2^2 = K_1K_2^2 + K_2O_2^2 + 2\overrightarrow{K_1K_2} \cdot \overrightarrow{K_2O_2}$$

Soit :

$$K_1M^2 - K_2M^2 = K_1K_2^2 + 2\overrightarrow{K_1K_2} \cdot (\overrightarrow{K_2O_2} + \overrightarrow{OM})$$

Or par construction :

$$\overrightarrow{K_1K_2} = l\vec{e}_z \text{ et } \overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z \text{ et } \overrightarrow{K_2O_2} = -K_2O_2\vec{e}_z$$

D'où

$$K_1M^2 - K_2M^2 = l^2 + 2l(-K_2O_2 + z)$$

Soit encore :

$$(K_1M - K_2M)(K_1M + K_2M) = l^2 + 2l(-K_2O_2 + z) \tag{2006.11}$$

Cette expression est géométriquement rigoureusement valable. Nous allons faire maintenant quelques hypothèses sur les ordres de grandeur qui correspondent à l'optique interférentielle. La différence $(K_1M - K_2M)$ est petite devant l'ordre de grandeur de K_1M ou K_2M , car la lentille L_2 est utilisée dans les conditions de Gauss (près du centre et incidence faible). Du coup, on peut faire l'hypothèse :

$$K_1M \sim K_2M \sim f_2' \text{ soit encore } K_1M + K_2M \sim 2f_2'$$

De même K_2O_2 est de l'ordre de grandeur de $l/2$. Soit :

$$K_2O_2 \sim l/2$$

L'équation (2006.11) devient donc :

$$(K_1M - K_2M) 2f_2' = l^2 - l^2 + 2lz$$

Puisque les angles sont petits, on a :

$$z = f_2'\theta$$

Et donc

$$(K_1M - K_2M) = l\theta$$

Il vient donc :

$$\boxed{\delta(M) = \frac{l\theta}{\lambda_0}} \tag{2006.12}$$

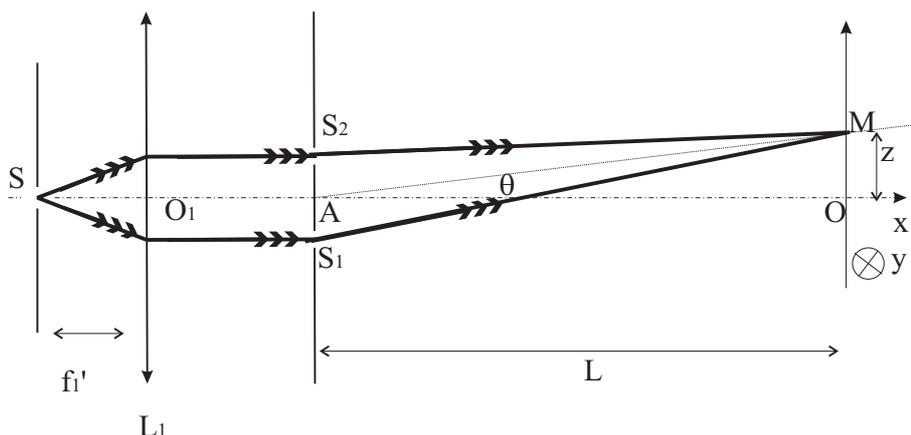


FIG. 2006.5 – Montage d'Young à "l'infini"

2. **2ème méthode Utilisation des propriétés de la lentille L_2** La lentille L_2 n'introduit pas de déphasage entre les rayons interférant en M . L'état d'interférence entre les deux rayons (1) et (2) sur l'écran (P) est donc le même que celui qui existerait sur le dispositif de la figure 2006.5 – sans lentille L_2 , où l'écran (P) est placé à l'infini des sources S_1 et S_2 (en fait à une distance $L \gg l$) – entre les rayons directs S_1M et S_2M .

Avec un raisonnement équivalent à la première méthode et en invoquant les vecteurs $\overrightarrow{S_1M}$ et $\overrightarrow{S_2M}$, il vient (en utilisant le point A milieu de S_1S_2) :

$$(S_1M + S_2M)(S_1M - S_2M) = 2\overrightarrow{S_1S_2} \cdot \overrightarrow{OM}$$

Or

$$\overrightarrow{S_1S_2} = l\vec{e}_z \text{ et } \overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$$

Et en supposant que $L \gg l$, on a nécessairement :

$$S_1M \sim S_2M \sim L \text{ soit } S_1M + S_2M \sim 2L$$

D'où

$$(S_1M - S_2M) = \frac{lz}{L}$$

Comme $L \gg l$,

$$z = L\theta$$

D'où

$$(S_1M - S_2M) = l\theta$$

En considérant que la différence de chemin optique ainsi calculé est la même que celle entre les rayons (1) et (2) de la figure 2006.4, il vient alors :

$$\delta(M) = \frac{l\theta}{\lambda_0}$$

Cette expression est bien la même que celle de l'équation (2006.12), si l'on suppose que les deux angles θ sont les mêmes. Ce qui signifie que la lentille L_2 est collée à l'écran où sont les trous S_1 et S_2 . Dans la pratique, les montages à trous d'Young avec lentille sont toujours tels que la lentille L_2 est collée à l'écran (E).

Remarque Importante sur l'énoncé. Cette question est longue et difficile à traiter à moins d'avoir vu ce raisonnement complet en cours. En particulier la méthode de calcul direct à partir de la figure 2006.4 est délicate à mener car il faut penser à utiliser toutes les hypothèses. En particulier, il faut penser que dans la pratique la lentille L_2 est collée à l'écran (E) et que les points K_1 et K_2 sont quasiment confondus avec les points S_1 et S_2 .

D'autre part, on peut soulever ici une difficulté liée à la rédaction de l'énoncé. En effet si le point M est uniquement repéré par l'angle θ sous lequel il est vu depuis O_2 , le point M est placé sur un cercle de centre O et de rayon z , puisqu'il

est indiqué clairement sur la figure que l'on considère un trièdre cartésien tridimensionnel x, y, z . Le point M dans le plan (P) est alors repéré par ses deux coordonnées y et z . C'est un point sur lequel il convient d'être vigilant et il faut clairement indiquer dès le début que l'on s'intéresse aux points M qui sont à $y = 0$.

I.4. En tenant compte de la remarque précédente, il vient :

$$OM = \theta f'_2$$

On a donc :

$$\delta(M) = \frac{lz}{f'_2 \lambda_0}$$

I.5. L'intensité lumineuse $I(z)$ sur l'écran (P) est en fonction de z de la forme :

$$I(z) = I_0 \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{lz}{f'_2 \lambda_0} \right) \right)$$

Les franges brillantes seront placées au côtes z_p où le cosinus est égal à 1, soit pour :

$$2\pi \frac{lz_p}{f'_2 \lambda_0} = p2\pi \text{ avec } p \in \mathcal{N}$$

Il vient donc

$$z_p = p \frac{f'_2 \lambda_0}{l}$$

I.6. L'interfrange i est la distance séparant deux franges brillantes, soit :

$$i = z_{p+1} - z_p = \frac{f'_2 \lambda_0}{l}$$

I.7. Sur la figure 2006.6 est schématisé, sur la gauche, la visualisation de l'écran (P) et sur la droite de la figure, est représentée la fonction luminosité $I(z)$ en fonction de la côte du point M . L'interfrange est représentée.

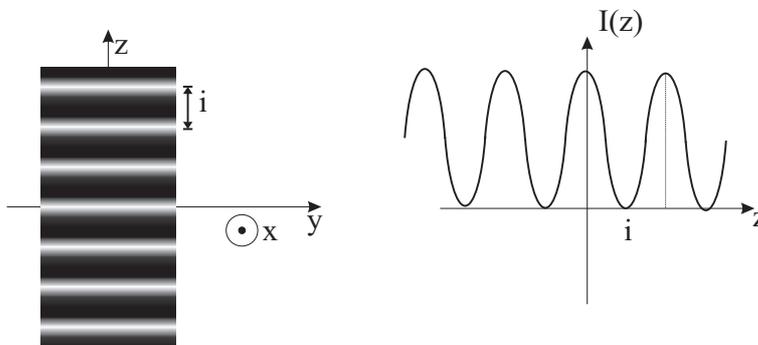


FIG. 2006.6 – Représentations de l'interférogramme

I.8. Question étrange ici. Qu'a t'on le droit de modifier ? Il est certain que le correcteur attend une certaine réponse mais aucun élément dans l'énoncé ne permet de cerner l'esprit dans lequel cette question est posée.

Pour augmenter la luminosité, il suffit d'utiliser une source plus puissante. Au vu de la longueur d'onde annoncé et de l'hypothèse de la ponctualité de la source S , on peut imaginer que la source est un laser rouge. Sa puissance d'émission n'est donc pas modifiable. Il ne s'agit donc sûrement pas de cette solution.

Une discussion classique sur les trous d'Young est l'extension des sources. C'est à dire qu'on se pose la question de savoir si l'on peut augmenter la taille des trous afin de faire passer plus de lumière. Pour que cela puisse fonctionner, il est nécessaire de conserver une petite dimension aux trous afin que ces derniers puissent diffracter la lumière. On allonge donc les trous sur une direction et on obtient ainsi des fentes, appelées fentes d'Young. Afin de ne pas brouiller la figure d'interférences, il faut utiliser des fentes dont la longueur est orthogonale à la direction séparant les fentes. Dans le schéma du montage proposé, il faut donc utiliser des fentes dont la longueur est parallèle à Oy .

Une autre discussion classique est l'utilisation de sources blanches, à luminosité plus importante. Ces sources sont polychromatiques et l'obtention de franges d'interférences peut se produire proche du contact optique (différence de

marche très faible) et nécessite un interféromètre de grande finesse. Généralement, on utilise des montages à division d'amplitude (Michelson par exemple) qui assure une meilleure finesse. Cependant, il est possible de le réaliser avec des fentes d'Young mais c'est, dans la pratique très délicat.

I.9. Application numérique

$$i = \frac{2 \times 0,5890 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} = 0,5890 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

II. Contrôle de l'homogénéité d'un matériau

Le système d'interférence obtenu peut être utilisé comme un appareil de mesure de distance dont la sensibilité est de l'ordre de grandeur de l'interfrange. Ceci permet donc d'effectuer des mesures optiques d'une grande finesse.

II.1. Il y a l'égalité entre les distances : $S_10 = S_20$. Lorsque l'on met la lame, le chemin optique $[S_10]$ du rayon (1) devient donc :

$$[S_10] = ne + (S_10 - e)$$

le chemin optique $[S_20]$ du rayon (2) est :

$$[S_20] = S_20$$

La différence de chemin optique entre les deux est donc en 0 :

$$[S_10] - [S_20] = (n - 1)e$$

La différence de marche est donc :

$$\delta(O) = \frac{(n - 1)e}{\lambda_0}$$

II.2. En O, il n'y a pas de différence de marche lié à la géométrie (puisque $z = 0$), mais juste liée à la présence de la lame. Entre une frange sombre et une frange lumineuse adjacente, on a fait évoluer la différence de marche de $1/2$. Puisqu'ici, on passe de la frange brillante à l'une et l'autre frange sombre de part et d'autre, on fait varier la différence de marche d'une unité. **En différenciant** l'expression précédente, il vient :

$$d\delta(0) = \frac{dn}{\lambda_0} e$$

En assimilant la différentielle à la variation finie, il vient :

$$\Delta\delta(0) = \frac{\Delta n}{\lambda_0} e$$

Soit :

$$\Delta n = \frac{\lambda_0}{e} \Delta\delta(0)$$

Comme $\Delta\delta(0) = 1$ sur l'ensemble du mouvement de la lame :

$$\Delta n = \frac{\lambda_0}{e}$$

II.3. Raisonnons tout d'abord comme s'il n'y avait pas la lentille L_2 . Lorsque n augmente, le chemin optique du rayon (1) devient plus long. On observe donc en O (si l'écran (P) est à l'infini) un état d'interférences qui est celui où le chemin optique de (1) est plus long que celui de (2). Quand il n'y a pas de lame, cet état se trouve **en dessous** du point O. On retrouve donc en O un état d'interférence qui devrait être **plus bas**. Tout se passe comme si l'interférogramme était monté.

La présence de la lentille L_2 complique les choses. Une lentille convergente propose une image inversée de l'objet. Si bien que si n augmente, l'interférogramme va donner l'impression de descendre.

Application numérique :

$$\Delta n = \frac{5890 \cdot 10^{-10}}{5 \cdot 10^{-3}} = 1178 \cdot 10^{-7} = 11,78 \cdot 10^{-5}$$

Soit :

$$\frac{\Delta n}{n_D} = \frac{11,78 \cdot 10^{-5}}{1,6725} = 7,0433 \cdot 10^{-5} > 10^{-5}$$

On ne peut donc pas considérer ce matériau comme homogène pour cette longueur d'onde.

D DIFFUSION DE MATIÈRE

I. Généralités sur la diffusion

Remarque préalable importante sur l'énoncé. L'énoncé parle clairement à plusieurs reprises d'un problème à symétrie sphérique. Il propose d'ailleurs de faire les calculs relatifs aux flux de neutrons dans cette hypothèse. Or le schéma de la figure 10 de l'énoncé ainsi que l'expression du gradient proposé sont explicitement donnés pour un type de coordonnées polaires, c'est à dire des coordonnées qui supposent une symétrie cylindrique.

La symétrie sphérique d'un problème suppose que les quantités physiques possèdent des propriétés autour d'un point central O .

Une symétrie cylindrique suppose que les propriétés des quantités physiques considérées possèdent des propriétés de symétrie selon un axe (généralement l'axe z).

Un problème à symétrie sphérique est fondamentalement tridimensionnel même si les quantités considérées ne dépendent que de la variable r .

Un problème à symétrie cylindrique est lui bidimensionnel : tous les plans orthogonaux à l'axe de symétrie sont équivalents.

Dans l'énoncé, il est visiblement confondu l'invariance selon l'axe z des coordonnées cylindriques et l'invariance selon l'angle ϕ des coordonnées sphériques. Cette confusion est d'autant plus délicate que dans la thématique de la diffusion intervient l'opérateur Laplacien dont les expressions diffèrent très notablement d'un système de coordonnées à l'autre.

Pour finir, la coordonnée r n'a pas du tout le même sens physique dans l'un et l'autre des systèmes de coordonnées. Dans le système sphérique elle désigne la distance entre 2 points, dans le système cylindrique la distance entre un point et un axe.

En fait pour être cohérent avec l'énoncé, il faut spécifier le fait que l'on suppose que dans tous les plans diamétraux de la sphère, on voit le même problème et que l'on étudie ce qui se passe uniquement dans un de ces plans.

I.1. L'énoncé indique que la quantité N^* ne dépend que de r . Seule la dérivée partielle de N^* selon r n'est pas nulle. La loi de Fick devient en utilisant l'expression du gradient donnée dans l'énoncé :

$$\vec{j}(r, t) = -D \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r$$

I.2. Par définition du vecteur $\vec{j}(r, t)$, le flux Φ au travers une surface fermée S_f est :

$$\Phi = \oint_{S_f} \vec{j}(P, t) \cdot \vec{dS}(P)$$

où $\vec{dS}(P)$ est le vecteur infinitésimal de surface au point P orienté orthogonalement à la surface au point P et vers l'extérieur.

Ici S_f est une sphère de rayon r . $\vec{dS}(P)$ est donc un vecteur parallèle en tout point de la sphère au vecteur de la base locale \vec{e}_r . Donc :

$$\Phi = \oint_{S_f} -D \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r} dS \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r$$

Puisque l'intégrale ne se fait pas sur la variable r , il vient :

$$\Phi = -D \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r} \oint_{S_f} dS = -D 4\pi r^2 \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r} = -DS \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r}$$

I.3. D'après la loi de Fick, si l'on note la dimension entre crochets, il vient :

$$[j] = \frac{[D][N^*]}{[r]} \implies [D] = \frac{[j][r]}{[N^*]}$$

N^* est une densité de neutron, c'est donc un nombre de neutrons (sans dimension) par unité de volume. Soit :

$$[N^*] = \frac{1}{[r]^3}$$

\vec{j} représente un vecteur densité de flux de courant. C'est donc un nombre de neutron qui passe **par unité de temps et de surface**. Soit :

$$[j] = \frac{1}{[r]^2[T]}$$

Donc :

$$[D] = \frac{[j][r]}{[N^*]} = \frac{[r][r]^3}{[r]^2[T]} = \frac{[r]^2}{[T]}$$

Son unité dans le système international sera donc le m^2/s

II. Diffusion de neutrons dans un milieu non absorbant

II.1.

Encore une(s) ambiguïté(s) de l'énoncé ! ?

1. Régime stationnaire ne signifie pas en général régime permanent. Un régime stationnaire peut être un régime où les quantités dépendent du temps mais dont cette dépendance ne varie pas dans le temps (pour faire simple). L'exemple type est le régime sinusoïdal forcé qui est considéré comme stationnaire. Un régime permanent stationnaire est un régime stationnaire où rien ne dépend du temps. Ici, il faut comprendre que la source envoie dans le milieu une quantité de neutrons par unité de temps qui reste constante. Donc LA propriété principale est que Φ ne dépend pas du temps.
2. L'énoncé attend UNE propriété principale. On vient d'en énoncer une. Seulement dans l'hypothèse d'un milieu non absorbant, les neutrons ne disparaissent pas du milieu M. La quantité de neutrons N_0 générés par la source S par unité de temps va traverser toutes les surfaces de contrôle sphériques. Le flux sera donc partout le même, quelle que soit la distance où l'on se situe. Il ne dépend pas de r .

Il y a donc deux temps de réponse à la question, pour arriver à deux propriétés fondamentales, qui finissent par se résumer en une seule : le flux est constant et uniforme.

Régime stationnaire (permanent) donc :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

Milieu non absorbant : tous les neutrons émis traversent toutes les surfaces de contrôle :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

Cela fait deux propriétés principales. Au final, Φ ne dépend ni du temps ni de la position :

$$\Phi = \text{Constante}$$

Si l'on prend le flux au travers de la surface Σ qui entoure la source S , par définition :

$$\Phi(R, t) = 4\pi R^2 N_0$$

Comme Φ est constant et uniforme :

$$\Phi = 4\pi R^2 N_0$$

II.2. En un point P , hors de la source, du milieu, le vecteur $\vec{j}(P)$ a donc pour expression :

$$\vec{j}(P) = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} N_0 \vec{e}_r = N_0 \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$$

L'équation de Fick a alors pour expression :

$$\vec{j}(P) = N_0 \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r = -D \frac{\partial N^*}{\partial r} \vec{e}_r$$

Puisque N^* ne dépend pas du temps et ne dépend que de r , on peut assimiler la dérivée partielle à une dérivée classique à une variable. On arrive donc à l'équation différentielle suivante pour N^* :

$$\frac{dN^*}{dr} = -\frac{N_0 R^2}{D r^2}$$

En prenant une primitive de cette expression, il vient immédiatement :

$$N^*(r) = \frac{N_0 R^2}{Dr} + N_1^*$$

où N_1^* est une constante d'intégration. Pour la déterminer, il suffit d'appliquer la condition à l'infini donnée par l'énoncé :

$$N^*(r \rightarrow \infty) = 0 = N_1^*$$

D'où :

$$N^*(r) = \frac{N_0 R^2}{Dr}$$

II.3.

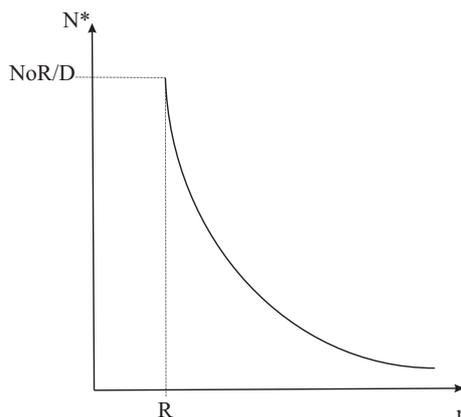


FIG. 2006.7 – Evolution de N^* en fonction de r

III. Absorption des neutrons par réaction nucléaire

III.1. dV est le volume obtenu par translation de la surface S de la coquille sphérique sur la longueur infinitésimale dr , soit :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

III.2. Le nombre total de neutrons doit être conservés, par nombre total on entend ceux qui sortent de la surface, ceux qui réagissent et ceux qui entrent, puisqu'on suppose que les neutrons ne peuvent pas s'accumuler. Soit :

$$\delta N_e = \delta N_s + \delta N_c \tag{2006.13}$$

III.3.

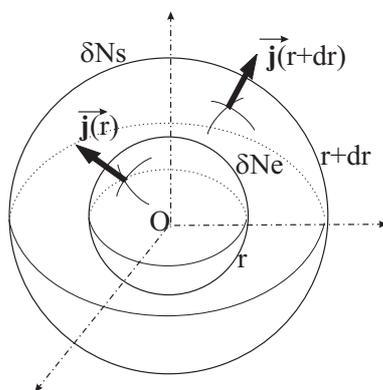


FIG. 2006.8 – Schéma de la coquille sphérique

Localement, sur un petit élément de la coquille sphérique considérée (voir sur la figure 2006.8), on a :

$$\vec{j}(r + dr) = \frac{\delta N_s}{4\pi r^2 \delta t} \vec{e}_r \text{ et } \vec{j}(r) = \frac{\delta N_e}{4\pi r^2 \delta t} \vec{e}_r$$

En divisant l'équation (2006.13) par $dV \delta t$, il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_c}{dV \delta t} &= \frac{\delta N_e - \delta N_s}{\delta N_e - \delta N_s} \\ &= \frac{4\pi r^2 \delta t dr}{\delta N_e - \delta N_s} \\ &= \frac{\vec{j}(r) \cdot \vec{e}_r - \vec{j}(r+dr) \cdot \vec{e}_r}{dr} \end{aligned}$$

Puisque par l'énoncé :

$$C = \frac{\delta N_c}{dV \delta t}$$

Et que l'on peut assimiler la différence $\vec{j}(r) \cdot \vec{e}_r - \vec{j}(r+dr) \cdot \vec{e}_r$ par une différentielle $-d\vec{j} \cdot \vec{e}_r$, il vient :

$$C = \frac{-d\vec{j} \cdot \vec{e}_r}{dr}$$

Une façon plus rapide et élégante de répondre à cette question est d'utiliser l'équation fondamentale de conservation de la matière :

$$\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial N^*}{\partial t} = 0$$

qui conduit au même résultat.

Par la question I.1, on a vu que :

$$\vec{j}(r, t) = -D \frac{\partial N^*(r, t)}{\partial r} \vec{e}_r$$

Il vient donc :

$$C = D \frac{d^2 N^*}{dr^2}$$

En intégrant deux fois cette relation, on obtient :

$$N^*(r) = \frac{C}{2D} r^2 + k_1 r + k_2$$

où k_1 et k_2 sont des constantes d'intégration que l'on va déterminer par les conditions aux limites.

k_2 est déterminé par la concentration en neutrons à la sortie de la source. Cette donnée n'est pas connue. En fait, cela n'a pas d'importance, puisque le phénomène de diffusion n'existe que s'il existe un gradient de concentration, ce sont donc les dérivées de $N^*(r)$ qui nous intéressent et k_2 n'intervient pas dans leurs expressions.

En dérivant cette équation, il vient :

$$\frac{dN^*}{dr} = \frac{C}{D} r + k_1$$

en $r = R$, on a d'après la question II.2 :

$$\frac{dN^*}{dr}(R) = -\frac{N_0}{D} = \frac{C}{D} R + k_1$$

Il vient donc :

$$k_1 = -\frac{N_0 + CR}{D}$$

D'où :

$$N^*(r) = \frac{C}{2D} r^2 - \frac{N_0 + CR}{D} r + k_2 \tag{2006.14}$$

III.4. En utilisant la question II.2, il vient :

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 \left(-D \frac{dN^*}{dr} \right)$$

Dérivant l'équation (2006.14), il vient :

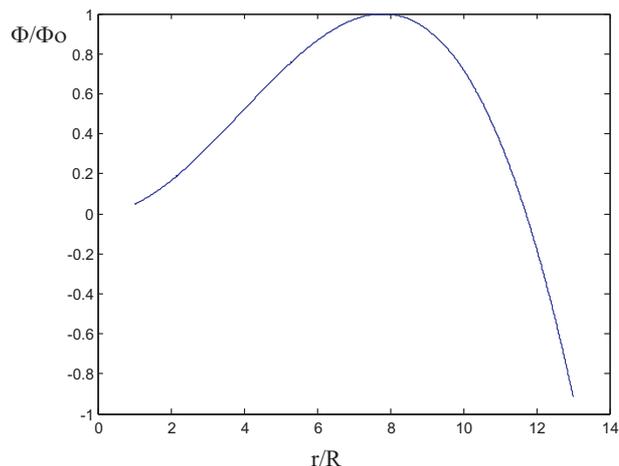
$$\frac{dN^*}{dr} = \frac{C}{D} r - \frac{N_0 + CR}{D}$$

D'où

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 (-Cr + N_0 + CR)$$

III.5. Cherchons R_0 tel que $\Phi(R_0) = 0$.

$$\Phi(R_0) = 0 \implies 4\pi R_0^2 (-CR_0 + N_0 + CR) = 0 \implies R_0 = \frac{N_0}{C} + R$$

FIG. 2006.9 – Flux de neutron (normalisé arbitrairement) en fonction de r/R

La fonction $\Phi(r)$ est schématisé (en unités arbitraires) sur la figure 2006.9. C'est un polynôme d'ordre 3 en r dont le coefficient d'ordre 3 est négatif. C'est donc une fonction qui finit par être décroissante en r . Mais sur une certaine distance, le flux augmente. Il s'annule pour la valeur $r = R_0$.

III.6. R_0 ne dépend pas de D . Rien d'étonnant à cela. On est en régime stationnaire et permanent d'émission de neutrons et on interdit à ces derniers de se concentrer dans le milieu. La vitesse à laquelle ils diffusent n'a donc pas de pertinence physique dans le problème. Ils disparaissent dans le volume à cause de la réaction nucléaire. Cette dernière a la particularité de faire disparaître les neutrons de façon constante dans le temps, en tout point du matériau, **quelle que soit la concentration en neutrons**. Il n'y a plus de neutrons qui diffusent lorsqu'ils ont traversé un volume suffisant de matériau pour tous les absorber. Ce volume est caractérisé par deux choses, la quantité de neutrons qui arrivent par unité de temps (N_0) et la quantité de neutrons qui disparaissent par unité de temps (C).

— FIN —

- Le travail élémentaire δW qu'échange un gaz avec l'extérieur lorsque son volume varie de δV , sous une pression extérieure P_{ext} est :

$$\delta W = -P_{ext}\delta V$$

Dans le cadre de la détente de Joule Gay-Lussac, le gaz se détend dans le vide. La pression extérieure est donc nulle, soit :

$$P_{ext} = 0 \Rightarrow \delta W_S = 0 \Rightarrow W_S = \int_0^f \delta W_S = 0$$

Finalement, la variation d'énergie interne est donc nulle :

$$\Delta U_S = W_S = 0$$

- Pour un gaz parfait, l'énergie interne ne dépend que de la température. La variation d'énergie interne ne dépend donc que de la variation de température. Soit :

$$\Delta U_S = 0 \Rightarrow \Delta T = T_f - T_0 = 0$$

I.2. Le volume final V_f est le volume total des deux enceintes (C_1) et (C_2). On a donc :

$$V_f = V_0 + V_0 = 2V_0$$

Le gaz suit la loi des gaz parfait :

$$P_f V_f = nRT_f = nRT_0 = P_0 V_0$$

Il vient donc :

$$P_f = \frac{P_0}{2}$$

I.3. L'agencement des questions est troublant. On a besoin de la question 4 pour répondre à la question 3. En effet cette transformation est telle que l'on est obligés d'en imaginer une autre pour pouvoir calculer la variation d'entropie

La transformation est fondamentalement hors-équilibre pendant tout son déroulement. Tel que le dispositif est monté, dès que la vanne sera ouverte, le gaz va passer de (C_1) à (C_2). Cette transformation est fondamentalement irréversible : on ne verra jamais le gaz revenir naturellement à son point de départ. On ne peut donc pas calculer la variation d'entropie sur cette transformation. On va donc utiliser la propriété majeure des fonctions d'état U et S :

La variation d'une fonction d'état entre deux états d'équilibre ne dépend que des deux états initiaux et finaux et pas du chemin parcouru pour passer de l'un à l'autre.

C'est à dire que n'importe quelle transformation qui fait passer le système (\mathbf{S}) de l'état (P_0, V_0, T_0) à l'état (P_f, V_f, T_f) produit une variation d'énergie interne, pour (\mathbf{S}), de ΔU_S et une variation d'entropie de ΔS_S .

On imagine donc une transformation **virtuelle**, notée τ_i , quasi-statique qui fait passer (\mathbf{S}) de l'état (P_0, V_0, T_0) à l'état $(P_0/2, 2V_0, T_0)$. Cette transformation est **isotherme**, puisque la température ne varie pas.

On appelle respectivement Q_{τ_i} , W_{τ_i} , les quantités de chaleur et de travail échangées par (\mathbf{S}) pendant cette transformation. On note avec un indice τ_i les variations des fonctions d'état.

- Puisque l'entropie est une fonction d'état, on a :

$$\Delta S_S = \Delta S_{\tau_i}$$

Remarque : La quantité ΔS_S est à priori incalculable directement, puisque la transformation se fait hors équilibre. La température du système n'est donc pas définie. La seule chose que le second principe permette d'écrire est :

$$\Delta S_S = \Delta S_S^e + \Delta S_S^{in} \text{ avec } \Delta S_S^{in} > 0$$

où ΔS_S^e est l'entropie échangée et ΔS_S^{in} est l'entropie créée de façon interne. Puisque la transformation est adiabatique : $\Delta S_S^e = 0$. On a donc

$$\Delta S_S = \Delta S_S^{in} > 0$$

Puisque τ_i est quasistatique, on a :

$$\Delta S_{\tau_i} = \int_0^f \frac{\delta Q_{\tau_i}}{T}$$

Il nous faut donc déterminer δQ_{τ_i} en fonction des variables d'état. Nous allons le faire grâce au premier principe et aux propriétés des gaz parfaits.

– Puisque U est une fonction d'état :

$$\Delta U_S = \Delta U_{\tau_i} = Q_{\tau_i} + W_{\tau_i}$$

Il vient donc :

$$\Delta U_{\tau_i} = Q_{\tau_i} + W_{\tau_i} = 0 \text{ soit } Q_{\tau_i} = -W_{\tau_i}$$

Relation que l'on peut écrire sur des quantités élémentaires (différentielles) :

$$\delta Q_{\tau_i} = -\delta W_{\tau_i}$$

– D'après ce que l'on a écrit à la question 1,

$$\delta W_{\tau_i} = -P_{ext}\delta V$$

Puisque la transformation τ_i est quasistatique, le système est à l'équilibre à tout instant de la transformation, on a donc :

$$P_{ext} = P = \frac{nRT_0}{V} \text{ (où } P \text{ est la pression du système)}$$

On a donc :

$$\delta Q_{\tau_i} = P\delta V = nRT_0 \frac{\delta V}{V}$$

– La température du système pendant la transformation τ_i est constante et vaut T_0 . Il vient donc :

$$\Delta S_S = \Delta S_{\tau_i} = \int_0^f \frac{\delta Q_{\tau_i}}{T_0} = \int_{V_0}^{V_f} \frac{nR\delta V}{V}$$

Soit finalement :

$$\Delta S_S = nR \ln \left[\frac{V_f}{V_0} \right]$$

Puisque $V_f = 2V_0$,

$$\boxed{\Delta S_S = nR \ln 2}$$

I.4. La discussion a été faite à la question précédente. Remarquons simplement que $nR \ln 2 > 0$. Cela est cohérent avec ce que l'on a écrit plus haut, à savoir :

$$\Delta S_S = \Delta S_S^{in} > 0$$

Ceci permet donc de vérifier que le calcul mené est cohérent avec les hypothèses que l'on s'est fixées.

I.5. Application numérique

Il est important de justifier les calculs. En cas d'erreur numérique, cela permet de donner au correcteur une possibilité d'apprécier le raisonnement.

1. Calculons la variation d'enthalpie.

$$H = U + PV$$

En notant un indice 0 pour l'état initial et un indice f pour l'état final :

$$H_0 = U_0 + P_0V_0 \text{ et } H_f = U_f + P_fV_f \Rightarrow \Delta H_S = H_f - H_0 = U_f - U_0 + P_fV_f - P_0V_0 = \Delta U_S + P_fV_f - P_0V_0$$

D'après les questions 1. et 2. $\Delta U_S = 0$ et $P_fV_f = P_0V_0$, donc :

$$\underline{\underline{\Delta H_S = 0}}$$

2. D'après la question 1.

$$\underline{Q_S = W_S = 0}$$

3. D'après la question 3.

$$\underline{\Delta S_S = nR \ln 2 = 1 \times 8,31 \times \ln 2 \sim 5,76 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$$

4. D'après la question 1.

$$\underline{T_f = T_0 = 273 \text{ K}} \text{ et } \underline{P_f = P_0/2 = nRT_0/(2V_0) = 1 \times 8,31 \times 273/(2 \times 20.10^{-3}) \sim 56700 \text{ Pa}}$$

On complète donc le tableau :

Grandeur	T_f (K)	P_f (Pa)	Q_S (J)	W_S (J)	ΔU_S (J)	ΔH_S (J)	ΔS_S (J · K ⁻¹)
Val. Num.	273	56700	0	0	0	0	5,76

II. Transformations couplées

II.1. Le piston est en équilibre mécanique. L'ensemble des forces qui s'exercent sur lui est donc de résultante nulle. Les pressions de chaque côté sont donc égales.

$$\boxed{P_1 = P_2 = 2P_0}$$

II.2. Cette transformation est **adiabatique et quasi-statique** pour le compartiment C_2 (l'énoncé explique bien que la transformation se fait lentement). Les variables d'état suivent donc la loi de la transformation de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{cste} \text{ soit } P_0V_0^\gamma = P_2V_2^\gamma = 2P_0V_1^\gamma$$

On a donc :

$$\boxed{V_2 = (2)^{-\frac{1}{\gamma}} V_0}$$

Le volume total des deux compartiments est inchangé. Soit :

$$V_2 + V_1 = 2V_0$$

D'où

$$\boxed{V_1 = V_0(2 - 2^{-\frac{1}{\gamma}})}$$

II.3. Dans les deux compartiments on a un gaz parfait. On a donc pour (C_2) :

$$P_2V_2 = nRT_2 = P_0V_0 \frac{T_2}{T_0}$$

Puisque $P_2 = 2P_0$, il vient :

$$2V_2 = V_0 \frac{T_2}{T_0}$$

Comme $V_2 = (2)^{-\frac{1}{\gamma}} V_0$

$$\boxed{T_2 = (2)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_0}$$

Pour (C_1) :

$$P_1V_1 = P_0V_0 \frac{T_1}{T_0}$$

Il vient donc :

$$\boxed{T_1 = (4 - 2^{1-\frac{1}{\gamma}}) T_0}$$

II.4. La variation d'énergie interne d'un **gaz parfait** ne dépend que de la variation de température :

$$\Delta U = nC_{v,m} (T_f - T_i)$$

où T_f, T_i sont les températures respectivement finales et initiales du gaz parfait. D'autre part, la relation de Mayer donne :

$$C_{p,m} - C_{v,m} = R \text{ soit } C_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Finalement,

$$\Delta U_2 = n \frac{R}{\gamma - 1} T_0 \left((2)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Comme $P_0V_0 = nRT_0$, il vient :

$$\Delta U_2 = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1} \left((2)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Et par le même raisonnement :

$$\Delta U_1 = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1} \left(3 - (2)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right)$$

II.5. Le système Σ formé par l'ensemble total du gaz contenu dans les deux enceintes est **fermé**. Il n'échange ni matière ni travail avec l'extérieur. Par contre, il échange la quantité de chaleur Q_1 . On a donc :

$$\Delta U_\Sigma = Q_1$$

L'énergie interne est une fonction d'état. Elle est donc extensive :

$$\Delta U_\Sigma = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

On a donc

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1$$

Soit

$$Q_1 = \frac{2P_0V_0}{\gamma - 1} \left(1 - (2)^{-\frac{1}{\gamma}} \right)$$

II.6. Application numérique. On pose les calculs pour bien montrer ce que l'on fait :

$$- T_2 = 2^{1-\frac{1}{\gamma}}T_0 = 2^{1-1/1,66} \times 273 \sim 360 \text{ K}$$

$$- T_1 = (4 - 2^{1-\frac{1}{\gamma}})T_0 = (4 - 2^{1-1/1,66}) \times 273 \sim 732 \text{ K}$$

$$- \Delta U_2 = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1} \left((2)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{10^5 \times 20 \cdot 10^{-3}}{1,66 - 1} \left((2)^{1-\frac{1}{1,66}} - 1 \right) = 9,61 \text{ J}$$

$$- \Delta U_1 = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1} \left(3 - (2)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{10^5 \times 20 \cdot 10^{-3}}{1,66 - 1} \left(3 - (2)^{1-\frac{1}{1,66}} \right) = 5,10 \text{ J}$$

$$- Q_1 = \Delta U_1 + \Delta U_2 \sim 14,7 \text{ J}$$

Grandeur	T_2 (K)	T_1 (K)	ΔU_2 (J)	ΔU_1 (J)	Q_1 (J)
Val. Num.	360	732	9,61	5,10	14,7

B MAGNÉTISME

I. Flux du vecteur champ magnétique

I.1. Ce résultat est un résultat de cours. On peut donc le donner tel quel. Cependant, ici, nous allons le démontrer. Dans les calculs de champ la méthode est toujours la même :

- Soit le système est hautement symétrique est l'on utilise un théorème intégré (Gauss en électrostatique, Ampère en magnéto-statique)
- Soit les symétries ne permettent pas un tel calcul et on utilise les formes générales (Biot et Savart en Magnétisme, Poisson en Electrostatique)

1. Symétries

Elles permettent de fixer deux choses, la direction du vecteur champ magnétique, d'une part et les variables d'espace dont il dépend, d'autre part. Le champ magnétique dépend a priori des trois coordonnées d'espace (r, θ, z) , et sa direction possède trois composantes **algébriques** selon les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$, soit de façon générale :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

- (a) Direction du champ : Tout plan Π contenant le fil est un plan de symétrie pour la distribution du courant. Le champ magnétique doit donc respecter cette symétrie. En tout point M d'un tel plan, le champ $\vec{B}_1(M)$ est donc orthogonal au plan Π (le champ magnétique est un pseudo-vecteur dont l'orientation dépend de l'orientation de l'espace). En tout point M , la direction orthogonale au plan Π contenant le fil et passant par M est le vecteur donnée par le vecteur orthoradial \vec{e}_θ . On a donc :

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_\theta(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$$

- (b) Dépendance en coordonnées :

Le système physique est invariant par translation selon \vec{e}_z . C'est à dire que tout point M' de coordonnées (r, θ, z') voit la même distribution de courant que le point $M(r, \theta, z)$ puisque le fil est infini. Donc le champ $\vec{B}_1(M)$ ne dépend pas de z .

Le système physique est invariant par rotation selon l'angle θ . C'est à dire que tout point M' de coordonnées (r, θ', z) voit la même distribution de courant que le point $M(r, \theta, z)$. Donc le champ $\vec{B}_1(M)$ ne dépend pas de θ .

Conclusion

$$\vec{B}_1(r, \theta, z) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$$

2. Théorème d'Ampère

Soit C un contour fermé quelconque, orienté de façon arbitraire. Soit Σ une surface, non fermée **s'appuyant** sur le contour C et dont la normale locale $d\vec{S}_\Sigma$ a pour sens, le sens donné par la règle de la main droite appliquée à l'orientation du contour C . Alors notant \vec{j} le vecteur densité de courant, on a l'égalité :

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j} \cdot d\vec{S}_\Sigma$$

Puisque \vec{j} est la densité de courant vectorielle, l'intégrale sur la surface est le courant **algébrique** total qui **traverse** la surface Σ dans le sens d'orientation donné par la règle de la main droite. Le théorème d'Ampère s'écrit donc aussi :

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_t^\Sigma$$

où I_t^Σ est le courant **algébrique** total qui **traverse** la surface Σ dans le sens d'orientation donné par la règle de la main droite.

Dans le cas présent, on prend comme contour \mathcal{C} le cercle de rayon r , centré sur le fil et comme surface Σ le disque délimité par le cercle. L'orientation du contour est choisie de telle façon que le vecteur $\overrightarrow{dS}_\Sigma$ soit orienté dans le sens des z positif. On comptera donc positivement le courant dans le sens \vec{e}_z . On a donc :

$$I_t^\Sigma = i_1 \text{ et } \overrightarrow{dl} = r d\theta \text{ donc } \overrightarrow{B}_1 \cdot \overrightarrow{dl} = r B_\theta(r) d\theta$$

d'où

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B}_1 \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} r B_\theta(r) d\theta = 2\pi r B_\theta(r)$$

Soit finalement :

$$B_\theta(r) = \mu_o \frac{i_1}{2\pi r}$$

Finalement, la réponse à la question est :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_1(M) = \mu_o \frac{i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

I.2. Lorsque r est constant, le champ magnétique est donc d'intensité constante. Les lignes de champ sont donc des cercles centrés sur le fil, dans un plan orthogonal à celui-ci.

I.3. Le flux Φ_1 qui passe au travers du cadre est :

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS}_\Sigma$$

où Σ est la surface plane s'appuyant sur le cadre, $\overrightarrow{dS}_\Sigma$ est le vecteur normal en tout point de cette surface. Il est donc dans une direction orthoradiale. Son sens doit être déterminé par la règle de la main droite, par l'orientation du cadre. Il sera plus facile de faire aboutir les calculs si l'on oriente le cadre de telle façon que le vecteur $\overrightarrow{dS}_\Sigma$ soit dans le même sens que \vec{e}_θ . Il faut donc orienter le cadre dans le sens trigonométrique par rapport à la figure. On a alors :

$$\overrightarrow{dS}_\Sigma = dz dr \vec{e}_\theta$$

Alors

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS}_\Sigma = \mu_o \int_{z=0}^{z=L} \int_{r=d}^{r=l+d} \frac{i_1}{2\pi r} dz dr = \mu_o \frac{i_1 L}{2\pi} \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)$$

II. Force électromotrice et courants induits

Remarque sur l'induction : Pour résoudre les problèmes d'induction, il existe deux voies de calcul.

- La première est d'utiliser la loi de Lenz-Faraday. Cette méthode est rapide et efficace, lorsque les surfaces de conducteurs sont simples. Elle permet rapidement d'avoir les grandeurs comme les tensions induites et les courants. Elle a cependant un inconvénient majeur dans le cadre de sujets de concours où il faut répondre juste. En effet cette méthode nécessite de parfaitement maîtriser la convention électrique récepteur-générateur et d'être très méticuleux sur l'orientation que l'on donne au circuit pour calculer les flux. Dit grossièrement, on a vite fait de s'emmêler les pinces dans des problèmes de signe et d'orientation de courant. Si le sujet ne demande pas explicitement de faire figurer le sens des tensions et des courants alors, on peut l'utiliser pour aller assez vite. C'est dans cet esprit qu'est posé le sujet puisqu'au paragraphe I, on demande explicitement l'expression du flux. Cependant, si on a lu correctement le sujet, on se rend compte que tous les cas de l'induction sont proposés pour ce problème (circuit mobile, champ constant ; circuit immobile, champ variable) et que le sujet demande bien les sens des tensions et des courants. Il ne suffira pas de dériver simplement l'expression obtenue au I.3 pour répondre à toutes les questions.
- La seconde méthode est basée sur le calcul du champ électro-moteur. Plus générale que la méthode précédente, elle fonctionne bien mais demande un peu plus de calcul. Cependant, les problèmes de signes sont grandement atténués. C'est par cette approche que l'on va traiter les questions suivantes.

Le champ électromoteur \overrightarrow{E}_m , apparaissant en un point M d'un conducteur se déplaçant à la vitesse \vec{V} , dans un champ magnétique $\vec{B}(M)$ est :

$$\overrightarrow{E}_m(M) = \vec{V} \wedge \vec{B}(M) - \frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t}$$

où $\vec{\mathbf{A}}(M)$ est le potentiel vecteur du champ magnétique : $\vec{\mathbf{B}} = \text{rot} \vec{\mathbf{A}}$

La différence de potentiel e induite dans un circuit filiforme est alors donnée par l'intégrale sur le circuit :

$$e = - \int_C \vec{\mathbf{E}}_m(M) \cdot d\vec{\mathbf{l}}$$

II.1. Le cadre est immobile, la vitesse est donc nulle. D'autre part, le courant i_1 est constant. Le champ magnétique ne dépend donc pas du temps. Le potentiel vecteur non plus. Le champ électromoteur est donc nul :

$$\vec{\mathbf{E}}_m(M) = \vec{\mathbf{0}}$$

La différence de potentiel induite (fem) est donc nulle.

II.2. Pour répondre aux deux premières questions, on va développer la troisième. On répondra donc à toutes les questions dans le même développement.

II.2. 1. ; II.2. 1.1. ; II.2. 1.2.

Dans ce cas,

$$\vec{\mathbf{E}}_m(M) = - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}(M)}{\partial t}$$

Calculons le potentiel vecteur $\vec{\mathbf{A}} = A_r \vec{\mathbf{e}}_r + A_\theta \vec{\mathbf{e}}_\theta + A_z \vec{\mathbf{e}}_z$. Ce potentiel est un 'vrai' vecteur. Tout plan orthogonal au fil i_1 ($\vec{\mathbf{e}}_z$) est plan **d'antisymétrie** pour la distribution de courant. Le potentiel vecteur lui est donc orthogonal. Donc $\vec{\mathbf{A}}$ est selon l'axe $\vec{\mathbf{e}}_z$. On a les mêmes invariances par translation et rotation que pour le champ $\vec{\mathbf{B}}_1$, donc $\vec{\mathbf{A}}$ ne dépend que de r . Alors

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}}_1 &= \text{rot} \vec{\mathbf{A}} \Rightarrow B_\theta \vec{\mathbf{e}}_\theta = (\vec{\mathbf{e}}_r \partial_r + \vec{\mathbf{e}}_\theta \partial_\theta + \vec{\mathbf{e}}_z \partial_z) \wedge (A_z(r) \vec{\mathbf{e}}_z) \\ &= \partial_r A_z(r) \vec{\mathbf{e}}_r \wedge \vec{\mathbf{e}}_z \\ &= -\partial_r A_z(r) \vec{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned}$$

D'où :

$$\mu_0 \frac{i_1}{2\pi r} = -\partial_r A_z(r)$$

En intégrant, il vient donc :

$$A_z = -\mu_0 \frac{i_1}{2\pi} \ln(r) + A_0$$

A_0 étant une constante d'intégration. Le champ électromoteur est donc :

$$\vec{\mathbf{E}}_m(M) = +\mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln(r) \frac{di_1}{dt} \vec{\mathbf{e}}_z = +\mu_0 \frac{a}{2\pi} \ln(r) \vec{\mathbf{e}}_z$$

On intègre cette relation sur le cadre, en orientant le cadre de telle façon que la normale à la surface du cadre orientée par la règle de la main droite soit dans le sens $\vec{\mathbf{e}}_\theta$. Le cadre est orienté comme sur la figure 2007.2.

On décompose le cadre \mathcal{B} en 4 brins b_1, b_2, b_3, b_4 . Il vient donc :

$$\oint_B \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}} = \int_{b_1} \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}}_1 + \int_{b_2} \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}}_2 + \int_{b_3} \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}}_3 + \int_{b_4} \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}}_4$$

Or on a :

$$\text{Sur } b_1 : (r = d) \quad d\vec{\mathbf{l}}_1 = dl_1 \vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \text{Sur } b_2 : \quad d\vec{\mathbf{l}}_2 = dl_2 \vec{\mathbf{e}}_r \quad ; \quad \text{Sur } b_3 : (r = l + d) \quad d\vec{\mathbf{l}}_3 = -dl_3 \vec{\mathbf{e}}_z \quad ; \quad \text{Sur } b_4 : \quad d\vec{\mathbf{l}}_4 = -dl_4 \vec{\mathbf{e}}_r$$

L'intégrale du champ ne fait donc intervenir que les brins b_1 et b_3 . Soit :

$$\oint_B \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}} = +\mu_0 \frac{a}{2\pi} \ln(d) \int_{b_1} dl_1 - \mu_0 \frac{a}{2\pi} \ln(l + d) \int_{b_3} dl_3$$

D'où

$$\oint_B \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}} = \frac{a\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{l+d}\right)$$

D'où

$$e = - \oint_B \vec{\mathbf{E}}_m(M) d\vec{\mathbf{l}} = \frac{a\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)$$

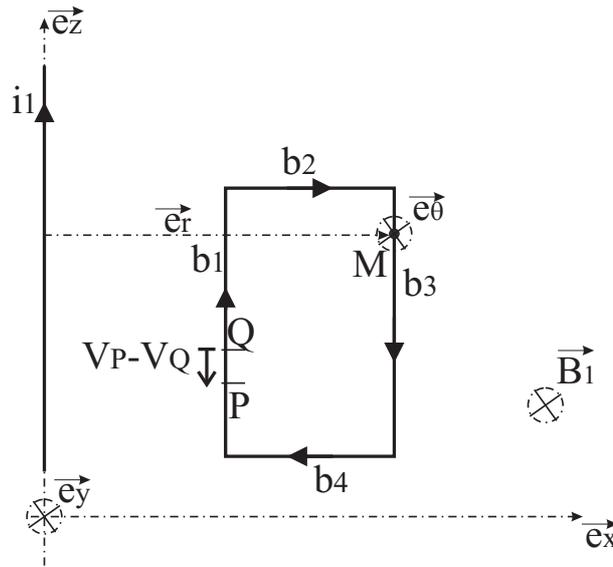


FIG. 2007.2 – Schéma des orientations du lacet fermé conducteur

La cadre est ainsi un générateur de tension. D'après la loi de Pouillet :

$$e + Ri_2 = 0 \text{ soit } i_2 = -\frac{a\mu_0 L}{2\pi R} \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)$$

Le courant i_2 circule donc, dans la branche proche du fil infini, dans le sens opposé à i_1 . Ceci est conforme à la loi de Faraday (ou loi de modération) qui prédit que le courant induit va s'opposer à la cause qui lui donne naissance (c'est à dire au champ magnétique).

II.2. 2. La différence de potentiel $V_P - V_Q$ est, d'après le développement précédent :

$$V_P - V_Q = -e = -\frac{a\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)$$

II.3. II.3. 1. Le potentiel vecteur possède la même direction que dans la question II.2 puisque les symétries sont les mêmes. Seule sa variation en fonction du temps change puisque le courant $i_1(t)$ évolue différemment dans le temps. On a donc, comme pour la question précédente :

$$\vec{A} = A_z \vec{e}_z \text{ avec } A_z = -\mu_0 \frac{i_1}{2\pi} \ln(r) + A_0$$

Il suffit donc en reprenant le raisonnement de la question II.2 de reprendre les résultats en remplaçant la variable a par la dérivée du courant i_1 que l'on note \dot{i}_1 .

$$\dot{i}_1 = I_m \omega_1 \cos(\omega_1 t)$$

Il vient donc :

$$i_2 = -\frac{I_m \omega_1 \cos(\omega_1 t) \mu_0 L}{2\pi R} \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)$$

II.3. 2. La figure 2007.3 présente schématiquement l'évolution en fonction du temps des deux courants électriques i_1 et i_2 . Ces derniers sont des courants harmoniques en quadrature.

II.4. Ici les grandeurs ne dépendent pas du temps. Le potentiel vecteur est donc constant. Le champ électromoteur est donc en tout point M sur le cadre :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{V}(M) \wedge \vec{B}(M)$$

II.4. 1. Le mouvement est un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω_2 constant. Notons $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_z$ le vecteur rotation du mouvement du cadre. La vitesse d'un point M du cadre est donc :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{OM}$$

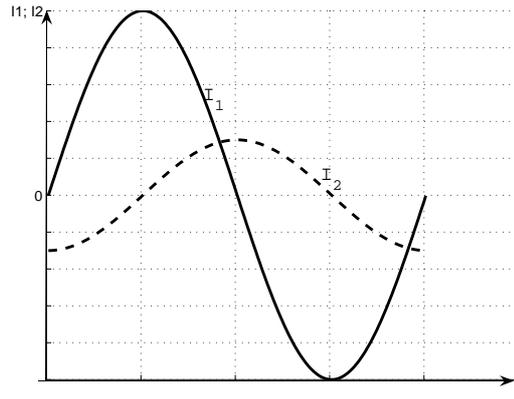


FIG. 2007.3 – Evolution des courants électriques en fonction du temps

où O est un point de l'axe zz' .

Dans le système cylindriques de coordonnées cette relation devient :

$$\vec{V}(M) = \omega_2 \vec{e}_z \wedge (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = r \omega_2 \vec{e}_\theta$$

La vitesse et le champ magnétique en tout point M du cadre sont donc parallèles. Leur produit vectoriel est donc nul. Le champ électromoteur est donc nul. Donc :

$$e = 0$$

II.4. 2. Ici, la vitesse d'un point M du cadre est donc :

$$\vec{V}(M) = v \vec{e}_x$$

Donc ici :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{V}(M) \wedge \vec{B}(M) = v \vec{e}_x \wedge B_\theta(r) \vec{e}_\theta = v \vec{e}_x \wedge B_\theta \vec{e}_y = v B_\theta(r) \vec{e}_z$$

avec $B_\theta(r) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$.

Avec la même orientation du cadre qu'à la question II.2, et le même chemin d'intégration, il vient :

$$e = v \frac{\mu_0 i_1 L}{2\pi} \left(\frac{1}{l + d_0 + vt} - \frac{1}{d_0 + vt} \right)$$

Les questions II.4 sont plus difficiles à traiter avec la loi de Lenz-Faraday. Pour utiliser correctement cette dernière, il faut utiliser dans ce contexte la notion de flux coupée qui est toujours délicate.

C OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

I. Etude de la lentille convergente L_1

I.1. L'objet AB est situé après la lentille L_1 . Il est donc dans l'espace réel des images et l'espace virtuel des objets. L'objet AB est virtuel.

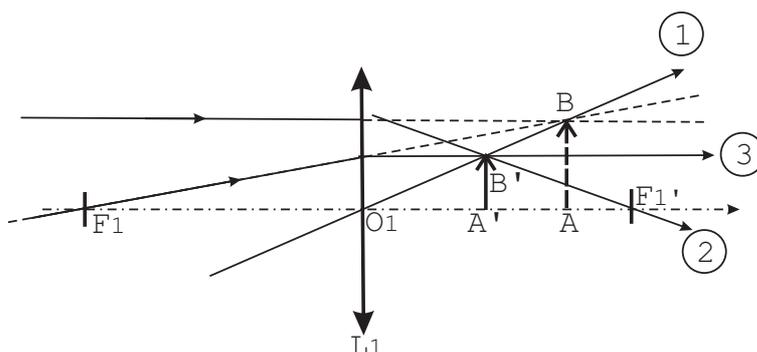


FIG. 2007.4 – Détermination de l'image $A'B'$ de l'objet AB

I.2. Les règles de bases de construction des images par des lentilles minces, en l'optique géométriques, sont au nombre de trois :

1. Tout rayon passant par le centre de la lentille O n'est pas dévié.
2. Tout rayon arrivant sur la lentille parallèlement à l'axe optique sort de la lentille en passant par le foyer image.
3. Tout rayon arrivant sur la lentille en passant par le foyer objet sort de la lentille parallèlement à l'axe optique.

Ces règles sont les mêmes pour les lentilles convergentes et divergentes. Habituellement, on trace les objets et images comme des flèches verticales à l'axe optique, en trait pleins s'ils sont réels et en pointillés lorsqu'ils sont virtuels. Les supports des rayons sont tracés en trait plein lorsqu'ils sont réels et en pointillés pour désigner qu'ils sont en réalité déviés.

Pour tracer l'image $A'B'$ de AB , on applique les trois règles dans l'ordre comme représenté sur le dessin de la figure 2007.4.

I.3. L'image $A'B'$ est alors réelle (d'après la construction). On peut aussi le retrouver par la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{O_1F_1'} \Rightarrow \frac{1}{O_1A'} = \frac{1}{O_1A} + \frac{1}{O_1F_1'} > 0$$

I.4. Une question bien étonnante quant à son sens. Physiquement un objet est un dispositif matériel que l'on place où l'on veut par rapport à la lentille. Si on lit l'énoncé jusqu'au bout, il est question par la suite de système optique comportant plusieurs lentilles. On peut donc imaginer que l'image donnée par la première lentille sera utilisée comme objet pour la seconde. C'est d'ailleurs le seul lien que l'on peut voir entre les différentes parties de l'énoncé (les résultats produits dans la partie I ne servent à rien par la suite).

On peut aussi remarquer que même si l'image $A'B'$ est réelle, on ne pourra pas l'observer sur un écran puisque elle est placée avant l'objet ($A'B'$ est coincée entre l'objet et la lentille). C'est donc a priori dans cet esprit qu'il faut répondre à la question.

Physiquement, on peut imaginer que l'objet AB soit lui même l'image réelle par une lentille convergente L_0 , placée avant L_1 , d'un objet réel A_0B_0 .

I.5. Application numérique :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6} \text{ cm}^{-1}$$

Soit

$$\boxed{\overline{O_1A'} = 6,0 \text{ cm}}$$

II. Etude d'un microscope

II.1. Un schéma de rayon lumineux passant par les deux lentilles du microscope est présenté sur la figure 2007.5.

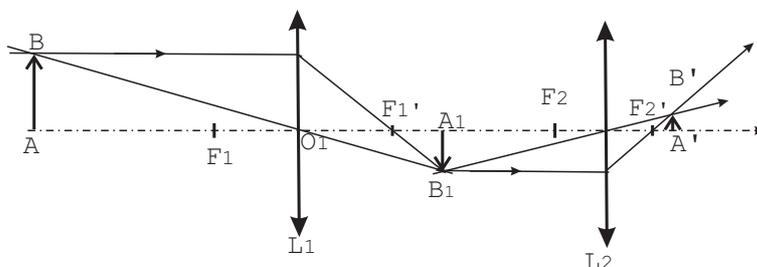


FIG. 2007.5 – Schéma du montage type microscope à 2 lentilles

Le grandissement γ_1 occasionné par la lentille L_1 est défini par le rapport :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

Or sur la figure 2007.5, il apparaît que les triangles AO_1B et A_1O_1B sont homothétiques de centre O_1 . Il vient donc :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$$

La relation de conjugaison sur la lentille 1, centrée en O_1 donne :

$$\frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1F'_1}}$$

Soit en multipliant par $\overline{O_1A}$ cette égalité, il vient :

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F'_1}}}}$$

II.2. Pour que l'image soit réelle, il faut qu'elle soit placée à droite de la lentille, comme sur le schéma de la figure 2007.5. Il faut donc que :

$$\overline{O_1A_1} > 0$$

D'autre part, pour que l'image soit plus grande que l'objet, il faut que :

$$|\gamma_1| > 1 \text{ soit } \left| 1 + \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F'_1}} \right| < 1$$

Puisque $\overline{O_1A} < 0$ La seule possibilité est donc que

$$\boxed{-2 < \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F'_1}} < -1}$$

Il faut donc que l'objet soit placé avant la lentille à moins de deux fois la distance focale et avant le foyer objet F_1 .

II.3. Un observateur ne peut pas voir une image réelle à l'oeil nu puisque son œil n'est pas un écran mais un système optique complexe dont le principe est analogue à une lentille mince convergente mobile (cristallin) par rapport à un écran fixe (la rétine). Pour voir une image réelle, un observateur doit placer un écran opaque perpendiculairement à l'axe

optique et regarder cet écran. Pour observer l'image A_1B_1 l'expérimentateur doit utiliser une seconde lentille (l'oculaire) que l'on étudie dans les questions suivantes.

II.4. L'œil n'accomode pas lorsqu'il met au point sur un objet situé à l'infini (dans la pratique quelque mètres). Pour que l'observateur puisse voir $A'B'$ au travers L_2 , il faut que $A'B'$ soit formée à l'infini de L_2 dans la partie "image réelle" (c'est à dire à droite de la lentille L_2). Il faut donc que :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}} \text{ avec } \frac{1}{\overline{O_2A'}} \rightarrow 0$$

Il faut donc que l'image A_1 soit au foyer objet F_2 de L_2 . Soit :

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F_2}$$

Si l'on veut la position relative de L_2 par rapport à L_1 , il faut exprimer la distance $\overline{O_1O_2}$ en fonction des distances focales.

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_2} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F_1'}}} + \overline{O_2F_2'}$$

II.5. On reprend la figure 2007.5 mais avec les paramètres géométriques que l'on vient de déterminer. A savoir : $2\overline{O_1F_1} < \overline{O_1A} < \overline{O_1F_1'}$ et $F_2 = A_1$. Ce schéma est représenté sur la figure 2007.6. On y a fait figurer l'angle α' qui est défini dans la question 6 pour plus de clarté. Cet angle est l'angle que font tous les rayons émergents du système avec l'axe optique.

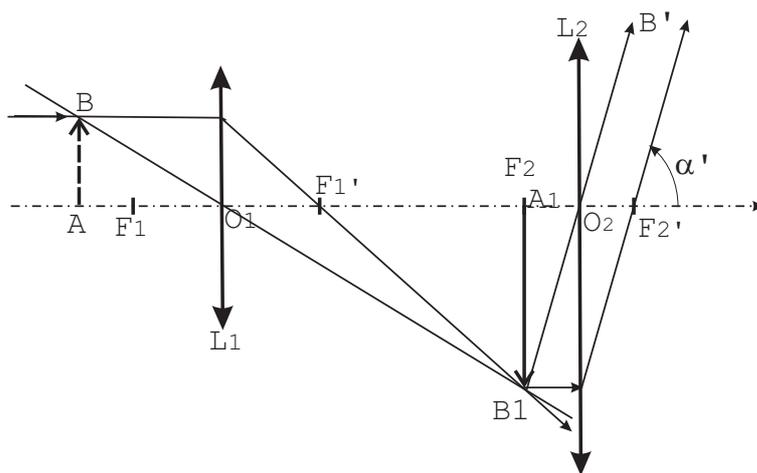


FIG. 2007.6 – Schéma du microscope avec oculaire réglé à l'infini

II.6.

II.6. 1. Reprenant la relation de la question 4, il vient numériquement :

$$\overline{O_1O_2} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F_1'}}} + \overline{O_2F_2'} = \frac{1}{-\frac{1}{11} + \frac{1}{10}} + 4 = 114 \text{ cm}$$

II.6. 2. Reprenant la relation de la question 4 et en multipliant astucieusement au dénominateur et numérateur le terme fractionnaire, il vient :

$$\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{O_1A}}{1 + \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F_1'}}} + \overline{O_2F_2'} = \gamma_1 \overline{O_1A} + \overline{O_2F_2'}$$

Soit :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1O_2} - \overline{O_2F_2'}}{\overline{O_1A}}$$

Soit numériquement :

$$\gamma_1 = \frac{114 - 4}{-11} = -10$$

II.6. 3. Sur la figure 2007.6, il apparait que

$$\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_2A_1}}$$

Comme on est dans l'approximation de Gauss :

$$\tan \alpha' = \alpha'$$

Il vient donc :

$$\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AB}}{\overline{O_2A_1}} = -\gamma_1 \frac{\overline{AB}}{\overline{O_2F_2}}$$

Numériquement :

$$\alpha' = +10 \frac{0,1}{4} = 0,25 \text{ rads}$$

II.6. 4. Dans l'approximation des petits angles :

$$\alpha_{\text{ref}} = \frac{\overline{AB}}{d_m} = \frac{0,1}{25} = 4.10^{-3} \text{ rads}$$

Alors :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha_{\text{ref}}} = \frac{0,25}{4.10^{-3}} = 62,5$$

Le grossissement de ce dispositif est donc supérieur à 60. L'observateur verra, au travers l'oculaire, une image apparente de 62,5 fois la taille de l'objet de départ. On peut ainsi mettre en évidence des détails invisibles à l'œil nu.

On peut aussi faire une remarque sur l'application numérique proposée. La distance O_1O_2 est de plus d'un mètre, ce qui ne correspond pas à la taille habituelle des microscopes. En fait cet exercice est démonstratif du principe du microscope mais pas de sa technologie. Le système de grandissement avant l'oculaire est en effet un peu plus complexe que ça. Il est possible aussi qu'une erreur ait eu lieu dans l'énoncé et qu'il fallait utiliser la valeur numérique de la partie I pour O_1A .

III. Principe du téléobjectif

III.1. L'objet AB est à l'infini. Donc son image est dans le plan focal image de la lentille convergente L_1 et $A_1 = F'_1$. L'image $A'B'$ est renvoyée à l'infini par la lentille divergente L_3 , donc A_1 se situe au foyer objet de L_3 , soit $A_1 = F_3$. Donc dans ce cas :

$$A_1 = F'_1 = F_3$$

Il s'ensuit que :

$$\overline{O_1O_3} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_3} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_3O_3} = f'_1 + f'_3$$

Le système est dit afocal puisqu'il ne conjugue pas l'infini en un point focal image.

III.2. Afin que $A'B'$ se forme sur un écran placé derrière L_3 , il faut que $A'B'$ soit une image **réelle** de l'objet A_1B_1 par la lentille L_3 . Il faut donc que $0 < \overline{O_3A_1} < \overline{O_3F_3}$ (il faut que l'objet pour L_3 divergente soit virtuel et se situe entre O_3 et le foyer objet F_3). Par rapport à la position déréglée et afocale de la question précédente, il faut donc **écarter** un peu O_3 de O_1 .

III.3. Attention ici, petite difficulté.

Si l'on souhaite faire un dessin correct, ça prend du temps car il faut construire l'image B' en justifiant succinctement sa construction, puis tracer le faisceau demandé. Soit on fait un dessin plus artistique, ne respectant pas trop les règles de construction mais ayant le mérite d'être plus clair, plus rapide, mais pouvant se révéler faux. Dans cette option, il faut être sûr du résultat. C'est à dire qu'il faut en fait finir le problème avec cette question...

Soit, on fait un schéma juste au brouillon, en tenant compte des échelles et règles de construction. On recopie ensuite ce schéma au propre en enlevant les traits de construction inutiles, qui rendent la figure illisible.

Dans la correction proposée ici, on fait figurer les deux schémas pour plus de clarté. Le premier schéma est intermédiaire (ou brouillon) et fait figurer tous les traits de construction. Il faut donc le lire en détail, trait par trait. Le second schéma est celui qui doit apparaître au propre sur la copie. C'est le même que le premier mais sans les traits de construction. Il est important de prendre son temps afin de traiter correctement cette question. La figure demandée est complexe et fait intervenir à peu près toutes les règles de construction de l'optique géométrique, avec seulement deux lentilles. Il est à peu près certain, que dans le cadre du concours, les candidats ayant traité correctement cette question ont du récupérer

un nombre de points significatif.

Sur la figure 2007.7, on construit l'image B' demandée.

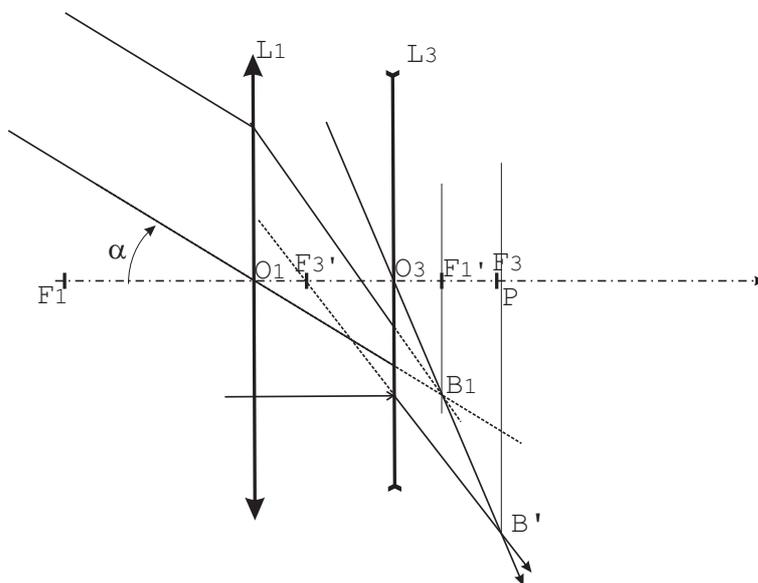


FIG. 2007.7 – Schéma de construction géométrique de B'

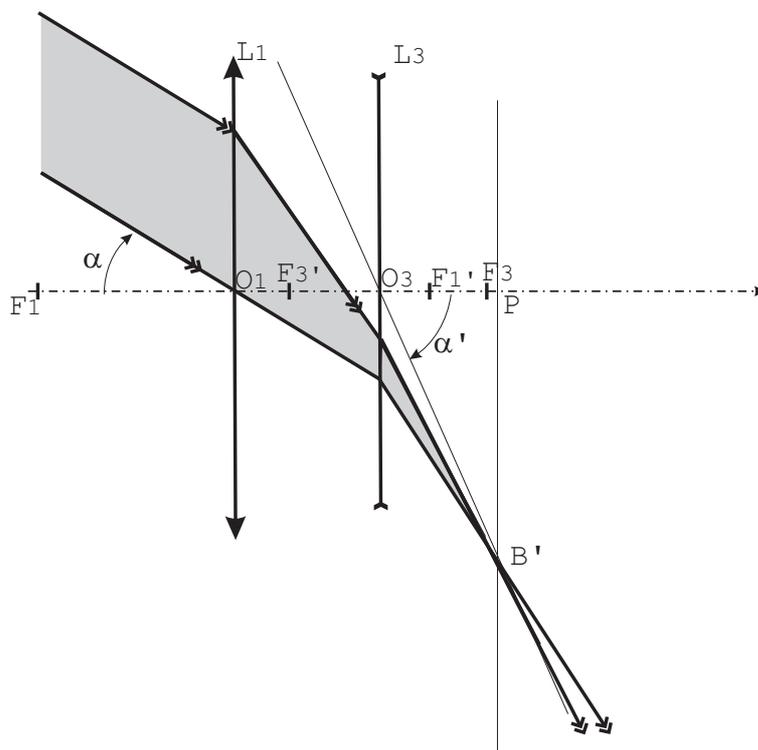


FIG. 2007.8 – Schéma du faisceau dans le téléobjectif

Pour cela, on fait intervenir la règle suivante sur les plans foyer images sur la lentille L_1 :

Tous les rayons incidents parallèles entre eux sortent de la lentille par le même point du plan foyer image.

On construit donc $A'B'$ en deux étapes graphiques. En premier lieu on construit B_1 comme l'image de B par L_1 , puis ensuite on construit B' comme l'image de B_1 par L_3

1. Le faisceau incident α ressort donc en un point du plan foyer image de L_1 . Ce point est le point d'intersection entre le plan foyer image (la droite perpendiculaire à l'axe et passant par F'_1 sur la figure) et le rayon d'incidence α passant par O_1 . Le point B_1 est donc en ce point.
2. Tout rayon incident à L_3 parallèle à l'axe optique ressort en passant par F'_3 , et le rayon O_3B_1 n'est pas dévié. B' est donc à l'intersection de ces deux rayons.

Une fois qu'on a B' , on recopie la figure en enlevant les traits de construction et en faisant un faisceau continu depuis les faisceau incident d'angle α jusqu'à B' . On obtient ainsi la figure 2007.8 **III.4**.

III.4. 1. Evaluons la distance $\overline{O_1O_3}$. Puisque A est à l'infini :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{\overline{O_1F'_1}} \text{ et } \frac{1}{\overline{O_3A'}} - \frac{1}{\overline{O_3A_1}} = \frac{1}{\overline{O_3F'_3}}$$

Soit :

$$\frac{1}{\overline{O_3P}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_3}} = \frac{1}{\overline{O_3A_1}}$$

D'où

$$\overline{O_3A_1} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_3P}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_3}}}$$

Alors :

$$\overline{O_1O_3} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_3} = \overline{O_1F'_1} - \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_3P}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_3}}}$$

Pour répondre à la question exacte de l'énoncé :

$$\boxed{\overline{F'_1F_3} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_3} + \overline{O_3F_3} = -\frac{1}{\frac{1}{\overline{O_3P}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_3}}} - \overline{O_3F'_3}}$$

Application numérique :

$$\overline{F'_1F_3} = -\frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{3}} + 3 = 3 - \frac{30}{13} \sim 0,69 \text{ cm}$$

III.4. 2. C'est une question qui combine le grandissement de la lentille L_3 , avec le grossissement angulaire de L_1 . Posons γ_3 le grandissement de la lentille L_3 . Soit

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3A_1}}$$

D'après la relation de la question précédente sur $\overline{O_3A_1}$, il vient donc :

$$\gamma_3 = \overline{O_3P} \left(\frac{1}{\overline{O_3P}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_3}} \right) = 1 - \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3F'_3}}$$

D'autre part d'après la figure 2007.7 on a pour les petits angles orientés (attention le α de l'énoncé doit être pris négatif en valeur algébrique à cause de son orientation) :

$$\overline{A_1B_1} = \overline{O_1F'_1} \alpha$$

Il vient donc

$$\overline{A'B'} = \gamma_3 \overline{A_1B_1} = \left(1 - \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3F'_3}} \right) \overline{O_1F'_1} \alpha$$

Application numérique :

$$\boxed{\overline{A'B'} = -\left(1 + \frac{10}{3} \right) 10 \cdot 10^{-1} = -4,3 \text{ cm}}$$

On peut aussi calculer le grandissement angulaire de ce téléobjectif :

$$\alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_3P}} = \left(1 - \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3F'_3}} \right) \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_3P}} \alpha$$

Soit :

$$G_a = \frac{\alpha'}{\alpha} = \left(1 - \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3F'_3}} \right) \frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{O_3P}}$$

Et l'application numérique donne :

$$G_a = \left(1 + \frac{10}{3} \right) \frac{10}{10} \sim 4,33$$

— FIN —

Epreuve de 2008

A THERMODYNAMIQUE

I. Diagramme du corps pur

I.1.

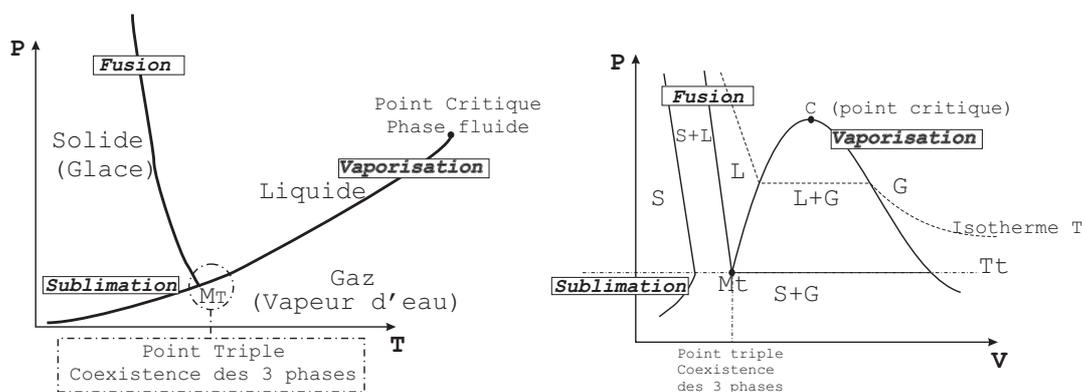


FIG. 2008.1 – Diagrammes schématiques (P,T) et (P,V) des différentes phases de l'eau. L, S, G désignent respectivement les phases liquide, gazeuse et solide (glace)

Les schémas de ces diagrammes classiques sont abordés dans beaucoup d'ouvrages de thermodynamique universitaire. On pourra par exemple se référer à : "Thermodynamique" de M. Hulin, N. Hulin et M. Veyssié, éditions Dunod.

I.2. Le diagramme (P,T) de l'eau est extraordinaire du point de vue de la pente de la courbe de coexistence entre le liquide et le solide. En effet, pour la très grande majorité des corps purs, cette pente est positive. En ce sens, l'eau fait figure d'exception. La fameuse relation de Clapeyron, relie la valeur algébrique de cette pente à la chaleur latente de fusion et à la différence des volumes massiques des deux phases. La chaleur latente de fusion est toujours positive (il faut fournir de la chaleur à un corps pour qu'il fonde), et en règle générale les phases solides (les plus condensées) ont un volume massique plus faible que les phases liquides – le volume massique est l'inverse de la masse volumique communément appelée densité.

Il se trouve que l'eau est plus dense sous sa forme liquide que sous sa forme solide : l'expérience quotidienne nous enseigne qu'un glaçon flotte dans un verre d'eau. Cette "anormalité" de l'eau est la conséquence de la structure moléculaire de l'eau. La molécule d'eau forme un dipôle électrostatique du fait de la grande différence d'électronégativité entre l'hydrogène et l'oxygène. Ce moment dipolaire important en ordre de grandeur (de l'ordre de 1 Debye pour la molécule d'eau) est responsable de ce que l'on nomme **la liaison hydrogène** qui est une interaction à longue distance entre les molécules d'eau. C'est cette interaction qui est responsable de la plus grande distance intermoléculaire dans la glace que dans l'eau liquide.

II. Transformation d'une masse d'eau

II.1. La première goutte liquide apparaîtra dans le récipient lorsque la pression de gaz sera égale à la pression de vapeur

saturante $P^*(T)$ à la température d'équilibre de l'expérience qui est T_{ext} . La première goutte se formera donc lorsque

$$P = P^*(T_{ext})$$

Puisque l'on considère que l'eau vapeur est un gaz parfait, la vapeur d'eau vérifie la loi de Boyle Mariotte :

$$PV_i = \frac{m}{M}RT_{ext}$$

La masse maximale d'eau sous forme de vapeur sèche sera donc obtenue lorsque la condition de pression de vapeur saturante sera atteinte soit

$$m_{max} = \frac{MP^*(T_{ext})V_i}{RT_{ext}}$$

Application numérique : $m_{max} = \frac{MP^*(T_{ext})V_i}{RT_{ext}} = \frac{18.10^{-3} \cdot 1.10^5 \times 20.10^{-3}}{8.31 \times 373} \sim 11.6g$ **II.2.**

II.2. 1. Comme on le voit sur la figure 2008.1, sur le diagramme (P, T) , lorsqu'on part de la phase gaz, à une température donnée (on peut suivre l'isotherme T en pointillés sur la figure), si l'on veut faire apparaître la phase liquide, il faut réduire le volume occupé par le gaz.

II.2. 2. Il faut, à nouveau réécrire la loi de Boyle Mariotte pour une pression égale à la pression de vapeur saturante. V_0 vérifie donc :

$$P^*(T_{ext})V_0 = \frac{m}{M}RT_{ext}$$

Soit

$$V_0 = \frac{m}{MP^*(T_{ext})}RT_{ext}$$

Application numérique : $V_0 = \frac{5.10^{-3}}{18.10^{-3} \cdot 1.10^5} \cdot 8.31 \times 373 = 861.10^{-5} \text{ m}^3 = 8,61l$

II.2. 3. Le liquide et la vapeur sont à l'équilibre. La pression de la vapeur est donc celle de la vapeur saturante à la température T_{ext} . Le volume V_G occupé par la vapeur vérifie donc :

$$P^*(T_{ext})V_G = \frac{m_v}{M}RT_{ext}$$

Soit

$$V_G = \frac{m}{2MP^*(T_{ext})}RT_{ext}$$

D'autre part, le volume V_L occupé par le liquide est :

$$V_L = \frac{m}{2\rho}$$

où ρ est la masse volumique de l'eau. Le volume total à la fin de la transformation est donc :

$$V_f = V_G + V_L$$

De façon quantitative, il est très fréquent de négliger le volume du liquide.

$$V_f = \frac{m}{2MP^*(T_{ext})}RT_{ext} + \frac{m}{2\rho} = \frac{V_0}{2}$$

Application numérique :

$$V_f = \frac{5.10^{-3}}{2 \times 18.10^{-3} \cdot 1.10^5} \cdot 8.31 \times 373 + \frac{5.10^{-3}}{2 \times 1000} = 430.10^{-5} + 2,5.10^{-6} \sim 430.10^{-5} \text{ m}^3 = 0.43l$$

On peut donc bien négliger le volume de liquide.

II.2. 4. On reprend les deux schémas de la figure 2008.1. Sur le diagramme (P, V) , on suit l'isotherme T_{ext} entre le point initial, noté I et le point final, noté F, comme indiqué sur la figure 2008.2. Le point final se trouve dans la zone de coexistence liquide-vapeur. La proportion de volume de liquide et de vapeur est donnée graphiquement par les deux points sur la courbe "en cloche" de coexistence des deux phases. Sur le diagramme (P, T) , la transformation subie par le système apparaît comme un seul point sur la courbe de rosée (coexistence vapeur-liquide), puisque P et T sont constantes.

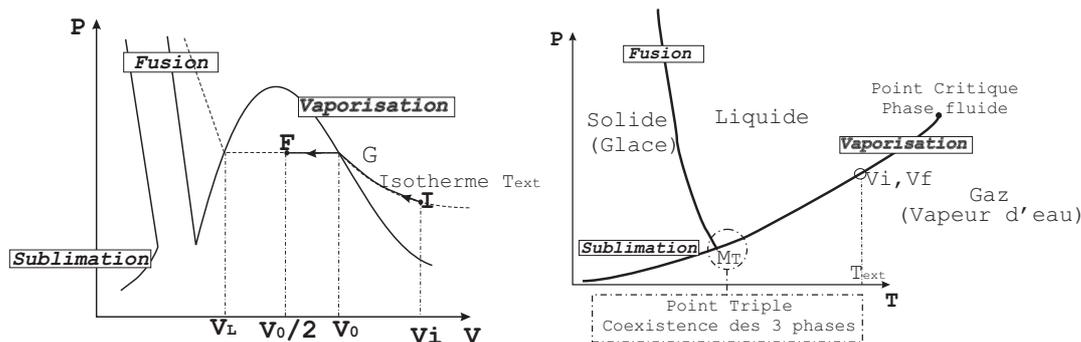


FIG. 2008.2 – Diagrammes schématiques (P,T) et (P,V) des différentes phases de l'eau. L, S, G désignent respectivement les phases liquide, gazeuse et solide (glace)

Il est à noter qu'initialement, la pression de la vapeur est plus faible que la pression de vapeur saturante puisque la masse de gaz introduite dans l'enceinte est plus petite que \$m_{max}\$.

II.2. 5. Appelons \$\Sigma_G\$, le système formé par les molécules d'eau, initialement sous forme gazeuse et qui ne change pas d'état (qui reste gazeux) (sa masse est \$m/2\$). Appelons \$\Sigma_L\$ le système formé par les molécules d'eau, initialement sous forme gazeuse et qui change d'état pendant la transformation (sa masse est \$m/2\$). Le système total \$\Sigma\$ est l'union de ces deux systèmes. Analysons la transformation pour chacun des deux systèmes :

- **Pour \$\Sigma_G\$:** C'est un gaz parfait de masse \$m/2\$, nombre de moles \$m/2M\$, qui subit une compression isotherme et quasi-statique. Il est toujours à l'équilibre pendant la transformation. Le travail élémentaire \$\delta W\$ qu'il échange avec l'extérieur est donné par la relation de cours :

$$\delta W = -PdV = -\frac{m}{2M} RT_{ext} \frac{dV}{V}$$

La pression évolue pendant la transformation entre les points I et la courbe de vaporisation, sur la figure 2008.2, donc entre les volumes \$V_i/2\$ et \$V_0/2\$ (les volumes \$V_i\$ et \$V_0\$ sont pour la totalité du système quand il est gazeux et \$\Sigma_G\$ Représente la moitié en masse du système total). Ensuite, le volume qu'occupe le gaz \$\Sigma_G\$ est celui qui est déterminé par la relation de Boyle-Mariotte, soit \$V_0/2\$ Le travail \$W_G\$ qu'il échange donc pendant toute la transformation est :

$$W_G = \int_{V_i/2}^{V_0/2} \delta W = -\frac{m}{2M} RT_{ext} \int_{V_i/2}^{V_0/2} \frac{dV}{V} = -\frac{m}{2M} RT_{ext} \ln\left(\frac{V_0}{V_i}\right)$$

- **Pour \$\Sigma_L\$:** Le système constitué d'une masse de \$m/2\$ d'eau est initialement identique au système \$\Sigma_G\$. Entre les volumes \$V_i/2\$ et \$V_0/2\$, il échange donc la même quantité de travail que le système \$\Sigma_G\$. Par la suite, ce système n'échange plus de travail mais uniquement de la chaleur puisque la seule transformation qu'il subit est alors un changement de phase. La quantité de travail \$W_L\$ échangé par le système \$\Sigma_L\$ est donc :

$$W_L = W_G = -\frac{m}{2M} RT_{ext} \ln\left(\frac{V_0}{V_i}\right)$$

Il nous faut maintenant justifier que le travail échangé par le système global \$\Sigma\$ est bien la somme des deux travaux \$W_G\$ et \$W_L\$. Durant la phase de compression de la vapeur sèche, les deux systèmes sont mélangés. Il ne peuvent échanger du travail entre eux, puisque la transformation est supposée quasi-statique. Le travail \$W_{eau}\$ échangé par l'ensemble du système \$\Sigma\$ se répartit donc en \$W_G\$ et \$W_L\$. Soit :

$$W_{eau} = W_G + W_L = -\frac{m}{M} RT_{ext} \ln\left(\frac{V_0}{V_i}\right)$$

Remarque : C'est le travail qui est échangé, en fait, par la totalité de la vapeur sèche pendant sa compression. A partir du moment où du liquide se forme, le système n'échange plus de travail.

II.2. 6. Application numérique :

D'après la question II.1,

$$m_{max} = 11,6 \text{ g}$$

D'après la question précédente et la question II.2.2,

$$W_{eau} = -\frac{5 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3}} \times 8,31 \times 373 \ln\left(\frac{8,61 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3}}\right) \sim 726 \text{ J}$$

B ETUDE D'UN FILTRE

I. E

tude théorique du "filtre RC série" **I.1.** Une résistance possède un comportement invariable selon la fréquence. Ce n'est pas le cas d'une capacité. En effet, pour les hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$) une capacité se comporte comme un fil électrique simple. Dans ce cas, la différence de potentiel à ses bornes tend à s'annuler. D'un autre côté, pour les faibles fréquences ($\omega \sim 0$), une capacité opère comme un interrupteur ouvert. Dans ce cas le courant passant dans la résistance est le courant de sortie du filtre, qui est nul. La tension $u_s(t)$ est donc alors la tension d'entrée. Ce filtre est donc un filtre **passé-bas**, qui ne laisse passer que les basses fréquences. **I.2.** Puisque le courant i de sortie du filtre est nul, on a affaire à un diviseur idéal de tension. Les amplitudes complexes des tensions vérifient donc :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{jC\omega \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)} u_e$$

Soit

$$\frac{H}{\frac{u_s}{u_e}} = \frac{1}{jC\omega \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)} = \frac{1}{jCR\omega + 1}$$

I.3. Le module et la phase de cette fonction de transfert s'obtient immédiatement : **I.3. 1.** Le module au carré de la fonction de transfert est donc :

$$G^2 = \frac{1}{C^2 R^2 \omega^2 + 1}$$

Soit

$$G = \frac{1}{\sqrt{(CR\omega)^2 + 1}}$$

I.3. 2. La tangente de la phase est donnée par le rapport des parties réelle et imaginaire :

$$\tan \Phi = \frac{\Im H}{\Re H} = -RC\omega$$

I.3. 3. la fonction G est une fonction décroissante de la pulsation. Son maximum est obtenu de façon évidente pour $\omega = 0$. Ainsi $G_{max} = 1$.

Donc $G(\omega_c) = 1/\sqrt{2}$. Cette valeur est obtenue pour :

$$(RC\omega_c)^2 = 1$$

Soit

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

I.3. 4.

$$\omega_c = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-8}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

II. Branchement à l'oscilloscope

II.1. On rajoute au circuit initial une branche RC parallèle. Dans ce cas de figure, le moyen le plus simple d'obtenir

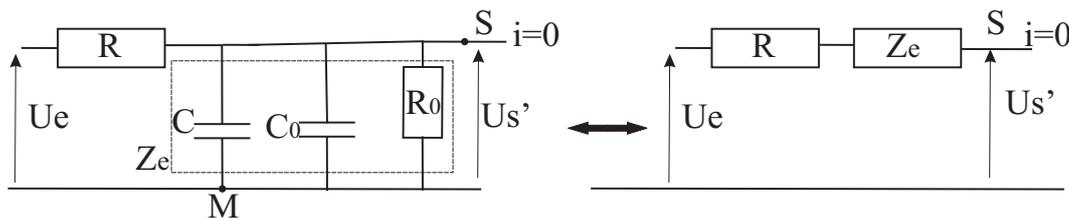


FIG. 2008.3 – Schéma électrique et notations

la fonction de transfert est d'utiliser les impédances équivalentes. Comme indiqué sur le schéma de la figure 2008.3, Le circuit est un diviseur idéal de tension entre R et Z_e l'impédance équivalente complexe à la mise en parallèle des deux capacités C et C_0 et de la résistance R_0 . Le diviseur idéal de tension amène à la relation suivante entre les amplitudes complexes \underline{U}_e et \underline{U}_s :

$$\underline{U}_s = \underline{U}_e \frac{Z_e}{R + Z_e} = \underline{U}_e \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_e}} \quad (a)$$

D'autre part, la règle de composition des impédances en parallèles amène à :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_0} + jC_0\omega + jC\omega \quad (b)$$

Substituant la relation (b) dans (a), il vient immédiatement :

$$\underline{H}' = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_0} + (RC + RC_0)j\omega} = \frac{\frac{R_0}{R_0 + R}}{1 + j \frac{R_0}{R_0 + R} (RC + RC_0)\omega}$$

On obtient donc bien la forme demandée par l'énoncé :

$$\underline{H}' = \frac{A}{1 + jB\omega} \text{ avec } A = \frac{R_0}{R + R_0} \text{ et } B = A(RC + RC_0)$$

II.2. On prend le module de la dernière expression. Comme A est un réel plus petit que 1, on le laisse dans les expressions afin de ne pas alourdir les équations. Il vient donc :

$$G' = \frac{A}{\sqrt{1 + B^2\omega^2}} = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2(RC + RC_0)^2\omega^2}}$$

II.3. De façon évidente G' est une fonction décroissante et monotone de ω . Son maximum est atteint pour $\omega = 0$ et vaut $G'_{max} = A$. La pulsation de coupure ω'_c est telle que :

$$G'(\omega'_c) = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

Cette pulsation vérifie donc :

$$A^2(RC + RC_0)^2\omega'^2_c = 1$$

Soit :

$$\omega'_c = \frac{1}{A(RC + RC_0)}$$

II.4. Application numérique :

$$\omega_c = \frac{1}{10^4 \times 10^{-8}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$A = \frac{5 \cdot 10^6}{10^4 + 5 \cdot 10^6} \sim 0,998$$

$$\omega'_c = \frac{1}{0,998 \times (10^4 \times 10^{-8} + 10^4 \times 5 \cdot 10^{-11})} \sim 9,97 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

II.5. ω'_c est plus petit que ω_c . Cependant la différence relative entre les deux est de l'ordre de **3 pour mille !**. Autrement dit elle est négligeable. C'est à dire que la mesure effectuée par l'oscilloscope ne perturbe pratiquement pas le signal mesurée, ce qui est ce que l'on attend d'un appareil de mesure.

C TRANSFERTS THERMIQUES : ÉTUDE D'UN CHAUFFE-EAU

I. Préliminaires

I.1. De façon générale, l'enthalpie d'un système est définie par la transformation de Legendre à partir de l'énergie interne. On utilise pour cela les variables couplées extensive et intensive de pression et volume. Comme ici la pression est maintenue constante et égale à P_{ext} , on a :

$$H_S = U_S + P_{ext}V$$

I.2. Différenciant cette dernière relation, on obtient :

$$dH_S = dU_S + dP_{ext}V = \delta Q_{P_{ext}} + \delta W + P_{ext}dV + VdP_{ext}$$

Comme P_{ext} est constant, $dP_{ext} = 0$. D'autre part, pour un système fluide qui échange du travail avec l'extérieur, le travail infinitésimal est :

$$\delta W = -PdV = -P_{ext}dV$$

Donc finalement, on obtient :

$$dH_S = \delta Q_{P_{ext}} - P_{ext}dV + P_{ext}dV = \delta Q_{P_{ext}}$$

Intégrant cette relation sur toute la transformation, il vient :

$$\Delta H_S = Q_{P_{ext}}$$

I.3. La quantité de chaleur échangée pendant une transformation sans changement d'état est reliée à la variation de température par la capacité calorifique :

$$\delta Q_{P_{ext}} = mc_e dT$$

II. Récipient supposé thermiquement isolé

II.1. D'après la relation précédente que l'on intègre entre les températures T_{ext} et T_1 , l'énergie nécessaire pour que l'eau passe de la température T_{ext} à T_1 est :

$$Q_{P_{ext}} = mc_e(T_1 - T_{ext})$$

II.2. La puissance de ce processus est définie par

$$P = \frac{Q_{P_{ext}}}{\Delta t}$$

D'autre part, comme la puissance thermique du chauffe-eau est connue et constante, il vient immédiatement :

$$\Delta t = \frac{Q_{P_{ext}}}{P_{th}}$$

II.3. Application numérique

$$Q_{P_{ext}} = 100 \times 4,18 \cdot 10^3 (350 - 290) = 25,08 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\Delta t = \frac{25,08 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 10^3} = 1,672 \cdot 10^4 \text{ s} = 4 \text{ h } 38' 40''$$

III. Récipient soumis à des pertes thermiques

III.1. Marche forcée du chauffe-eau

III.1. 1. Lorsque T est supérieur à T_{ext} , le système S cède de la chaleur au milieu extérieur. Ainsi le signe de $\delta Q_{P_{ext}}$ est alors négatif. D'après la relation de l'énoncé la constante k se doit d'être **positive**. **III.1. 2.** Lorsque le chauffe-eau est en régime forcé, et que la température de l'eau n'évolue plus, alors durant le laps de temps δt , la quantité de chaleur apportée par la résistance compense exactement la quantité de chaleur cédée à l'extérieur. Ce phénomène se traduit par l'égalité :

$$\delta Q_{P_{ext}} = -P_{th}\delta t$$

soit en remplaçant par l'expression de $\delta Q_{P_{ext}}$, il vient :

$$k = \frac{P_{th}}{T_{lim} - T_{ext}}$$

III.1. 3. Application numérique ;

$$k = \frac{1,5 \cdot 10^3}{370 - 290} = 18,75 \text{ W/K}$$

III.2. Le chauffage est arrêté

III.2. 1. Durant le laps de temps dt , la variation d'enthalpie de l'eau est reliée à sa variation de température par la relation établie à la question I.3 :

$$dH_S = mc_e dT$$

D'autre part elle est aussi égale à la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur soit :

$$dH_S = \delta Q_{P_{ext}} = -k(T - T_{ext})dt$$

On obtient donc l'égalité :

$$-k(T - T_{ext})dt = mc_e dT$$

En divisant par dt et mc_e , il vient l'équation différentielle en température :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc_e}(T - T_{ext}) = 0$$

III.2. 2. L'équation homogène associée est :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc_e}T = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$T(t) = A \exp\left[-\frac{k}{mc_e}t\right]$$

où A est une constante que l'on déterminera à la fin de la résolution par les conditions initiales.

Une solution particulière évidente est $T = T_{ext}$. Donc la solution s'écrit de façon générique :

$$T(t) = A \exp\left[-\frac{k}{mc_e}t\right] + T_{ext}$$

A l'instant $t = 0$, la température vaut $T(t = 0) = T_{lim}$. On en déduit donc que

$$A + T_{ext} = T_{lim} \text{ soit } A = T_{lim} - T_{ext}$$

D'où la solution pour la fonction T :

$$T(t) = T_{ext} + (T_{lim} - T_{ext}) \exp\left[-\frac{k}{mc_e}t\right]$$

III.2. 3. La figure 2008.4 représente la forme décroissante de la température de l'eau en fonction du temps. On voit qu'au bout de $1,5 \cdot 10^5 \text{ s} \sim 41 \text{ h}$ la température de l'eau est revenue à la température extérieure. Au bout de $50000 \text{ s} \sim 14 \text{ h}$, l'eau a perdu 70 degrés. **III.3.** Montée en température de l'eau

III.3. 1. On reprend le raisonnement de la question précédente. La variation d'enthalpie lors de la variation dT de la température, pendant le laps de temps dt est :

$$dH_S = mc_e dT$$

D'autre part, cette variation est égale à la quantité de chaleur échangée par l'eau pendant ce laps de temps (démonstré à la question I). La chaleur δQ échangée par l'eau est égale à la somme de la chaleur cédée par l'eau au milieu extérieur (par les pertes) et récupérée par l'eau (par la résistance électrique). Soit :

$$dH_S = \delta Q = \delta Q_{P_{ext}} + P_{th}dt = -k(T - T_{ext})dt + P_{th}dt$$

En égalant les deux expressions de variation de l'enthalpie, il vient :

$$mc_e dT = -k(T - T_{ext})dt + P_{th}dt$$

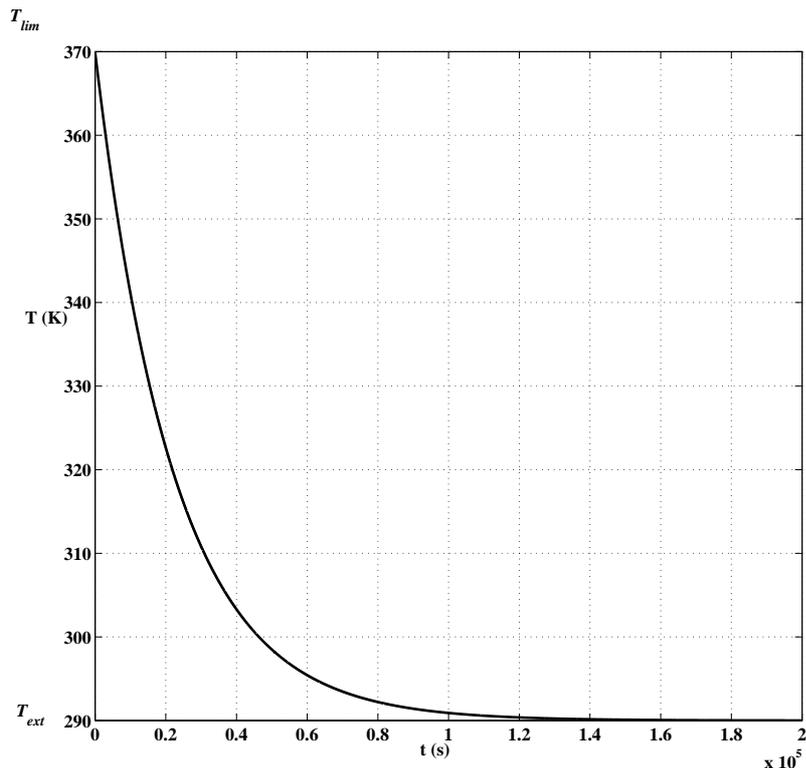


FIG. 2008.4 – Evolution de la température en fonction du temps

Soit :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{k}{mc_e} T = \frac{k}{mc_e} T_{ext} + \frac{P_{th}}{mc_e}}$$

III.3. 2. L'équation est pratiquement la même qu'à la question précédente. Seul le second membre constant est changé. La forme de la solution s'écrit donc :

$$T(t) = K \exp\left[-\frac{k}{mc_e} t\right] + T_{ext} + \frac{P_{th}}{k}$$

où K est une constante déterminée par les conditions initiales.

En $t = 0$, $T = T_{ext}$ ce qui se traduit par :

$$K + T_{ext} + \frac{P_{th}}{k} = T_{ext}$$

Soit $K = -\frac{P_{th}}{k}$.

D'où la solution :

$$\boxed{T(t) = \frac{P_{th}}{k} \left(1 - \exp\left[-\frac{k}{mc_e} t\right]\right) + T_{ext}}$$

III.3. 3. Sur la figure 2008.5 est tracé l'évolution de la température lorsque le chauffe-eau est allumé. C'est une exponentielle croissante, limitée par la température limite. C'est le type de courbe que l'on retrouve en électrocinétique lorsque l'on charge une capacité au travers d'une résistance par exemple. La figure permet de bien comprendre la température de fonctionnement de 350K. En effet, sur la figure, on voit qu'il faut un temps de l'ordre de 30000 secondes pour passer de 290K à 350, soit à peu près 8 heures et 20 minutes pour que l'eau chauffe de 60 degrés Celcius. A partir de 350K, dans le même laps de temps, on observe que l'eau ne gagne plus que 15 degrés Celcius. En bref, il faut une 8 heures pour chauffer l'eau de 290 à 350 K et près de 24 heures pour la faire passer de 350 à 370 K. Au delà de 350 K, les pertes énergétiques dominent donc le phénomène de transfert thermique.

III.3. 4. Afin de trouver l'expression analytique de $\Delta t'$, il faut inverser la relation de la question 3.2. Pour $t = \Delta t'$, $T = T_1$, ce qui se traduit par :

$$T_1 = \frac{P_{th}}{k} \left(1 - \exp\left[-\frac{k}{mc_e} \Delta t'\right]\right) + T_{ext}$$

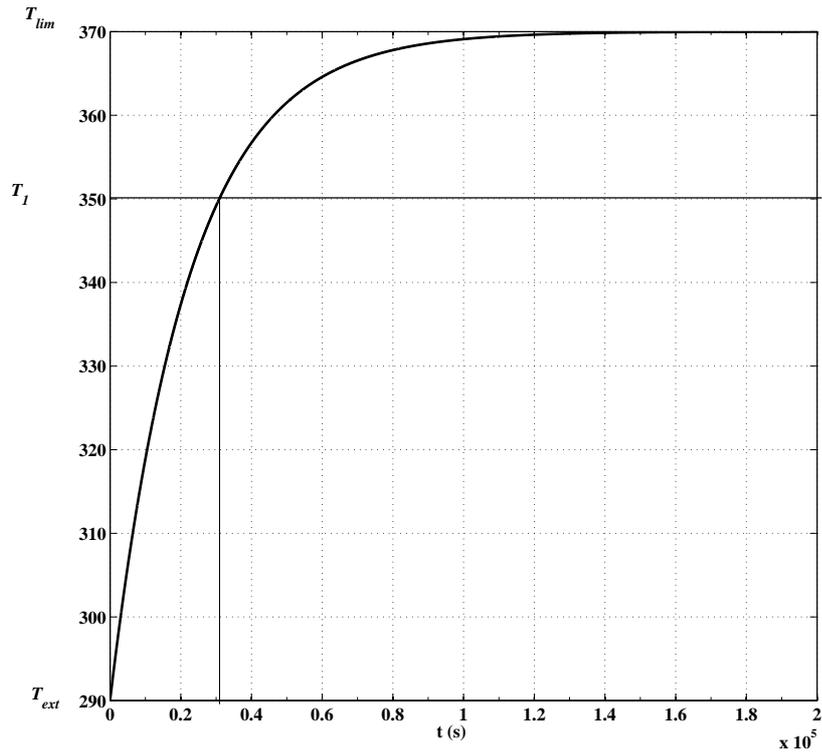


FIG. 2008.5 – Evolution de la température en fonction du temps

Soit :

$$1 - (T_1 - T_{ext}) \frac{k}{P_{th}} = \exp \left[-\frac{k}{mc_e} \Delta t' \right]$$

Soit :

$$\Delta t' = -\frac{mc_e}{k} \ln \left[1 - (T_1 - T_{ext}) \frac{k}{P_{th}} \right]$$

Numériquement :

$$\Delta t' = -\frac{1004,18 \cdot 10^3}{18,75} \ln \left[1 - (350 - 290) \frac{18,75}{1,5 \cdot 10^3} \right] \sim 30905 \text{ s} \sim 8 \text{ h } 35' 5''$$

— FIN —

Epreuve de 2009

A ELECTROSTATIQUE : MODÈLE DES PLANS INFINIS

I. Plan infini

Le plan P_1 est un plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique $\vec{E}(M)$ généré par cette distribution est donc anti-symétrique par rapport au plan P_1 . En effet si au point $M(x)$, un champ \vec{E} est observé, alors au point $M'(x')$ tel que $x' + x = 2a$ (M' symétrique de M par rapport à P_1), le champ $\vec{E}(M')$ est orienté relativement à P_1 comme \vec{E} , comme indiqué sur la figure 2009.1. On obtient donc :

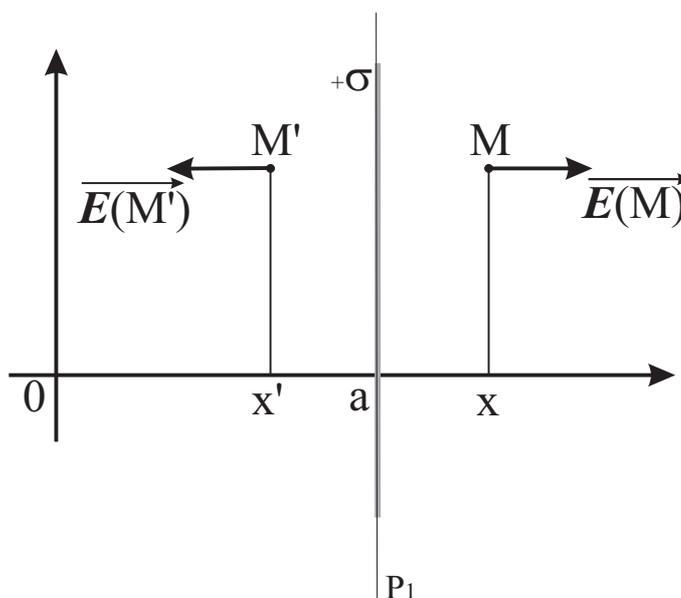


FIG. 2009.1 – Plan infini chargé

$$\vec{E}(x > a) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x \text{ et } \vec{E}(x < a) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

II. Deux plans infinis parallèles

II.1. La linéarité des équations de l'électrostatique permet d'utiliser le théorème de superposition. Le champ total est la somme des champs générés respectivement par les deux distributions de charges (qui ne s'influencent pas, ici, par hypothèse de l'énoncé). Soient \vec{E}_1 le champ créé par le plane P_1 et \vec{E}_2 celui créé par le plan P_2 , le champ total $\vec{E}_{tot}(M)$ en un point M quelconque de l'espace est

$$\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

Le champ \vec{E}_1 a été traité dans le paragraphe précédent. Le champ \vec{E}_2 est de même forme. Ainsi :

$$\vec{E}_2(x > -a) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x \text{ et } \vec{E}_2(x < -a) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

\vec{E}_2 est orienté vers le plan P_2 (entrant) alors que \vec{E}_1 est orienté dans le sens sortant du plan P_1 , comme indiqué sur la figure 2009.2.

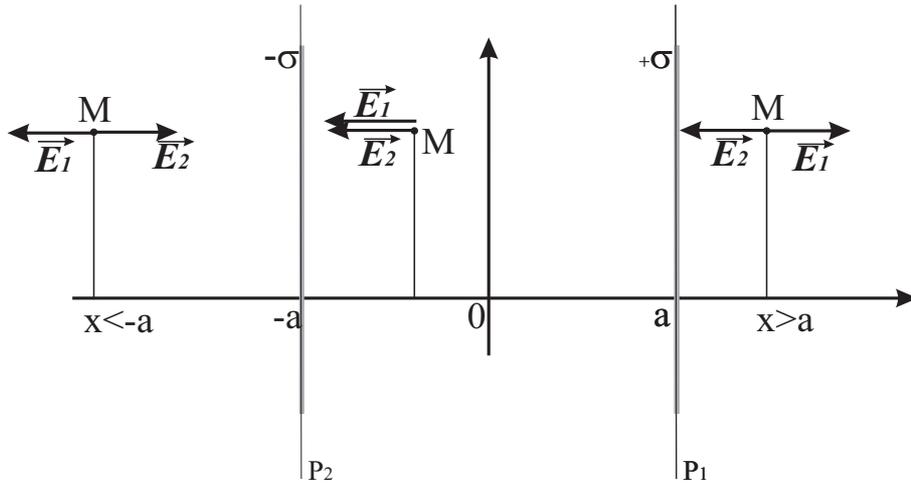


FIG. 2009.2 – 2 plans infinis parallèles

Il vient donc :

$x < -a$	$\vec{E}_1(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_2(x) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_{tot}(x) = \vec{0}$
$x > a$	$\vec{E}_1(x) = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_2(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_{tot}(x) = \vec{0}$
$-a < x < a$	$\vec{E}_1(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_2(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$	$\vec{E}_{tot}(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$

II.2. Le tracé de la fonction E_{tot} est représenté sur la figure 2009.3. Le point remarquable est que le champ électrique

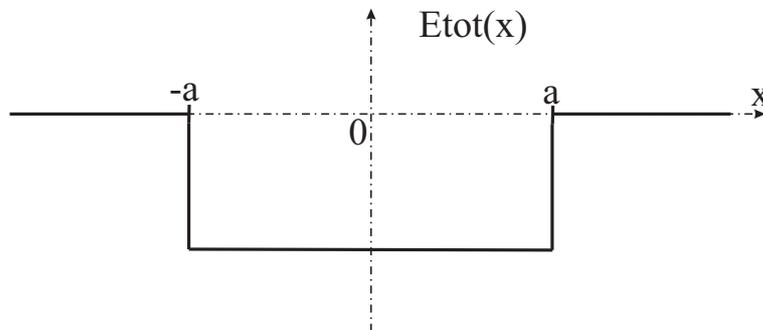


FIG. 2009.3 – Champ électrique dans les différentes régions de l'espace

(contrairement au potentiel) n'est pas continu. Il "saute" d'une valeur à l'autre à la traversée des plans chargés. **II.3.** Entre le champ électrique et le potentiel, on a la relation différentielle :

$$\vec{E}_{tot} = E_{tot} \vec{e}_x = -\text{grad}(V_{tot})$$

D'autre part, en coordonnées cartésiennes :

$$-\text{grad}(V_{tot}) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_{tot}(x)$$

Le potentiel ne dépend que de x . Il suffit d'intégrer cette dernière relation en x dans les trois régions puis d'invoquer la continuité du potentiel.

Dans la région I :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow V_I(x) = C_0(\text{constant})$$

Dans la région III :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Rightarrow V_{III}(x) = C_1(\text{constant})$$

Et dans la région II :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow V_{II}(x) = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + C_2(\text{constant})$$

Le potentiel doit être continu, donc en particulier en $x=-a$ et $x=+a$. On doit donc avoir :

$$V_I(a) = C_0 = V_{II}(a) = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a + C_2$$

Mais aussi

$$V_{III}(-a) = C_1 = V_{II}(-a) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a + C_2$$

Et enfin, la référence des potentiels est prise en 0, soit :

$$V_{II}(0) = C_2$$

Ce qui amène donc à

$$C_0 = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \text{ et } C_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$$

On en déduit donc le tableau suivant pour le potentiel :

	I	II	III
$V(x)$	$+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$	$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x$	$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a$

II.4. Le tracé de la fonction V_{tot} est représenté sur la figure 2009.4.

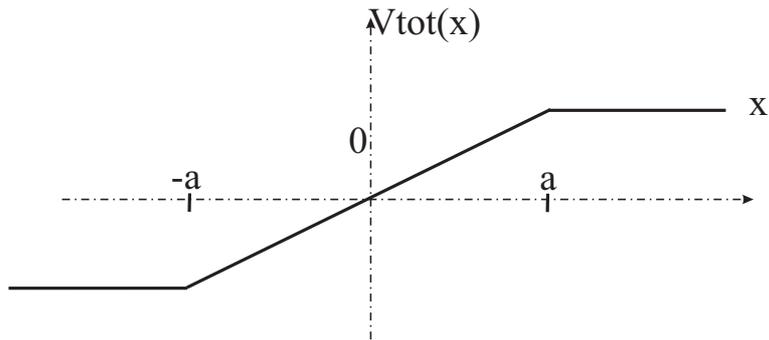


FIG. 2009.4 – Potentiel électrique dans les différentes régions de l'espace

B RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ D'UN DIPÔLE RLC SÉRIE

I. Caractéristiques de la tensions d'alimentation $e(t)$

I.1. Il s'agit de la relation classique entre la pulsation et la période :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

I.2. La valeur efficace d'une tension variable dans le temps (quel que soit le régime) est la valeur de la tension continue qui a la même puissance électrique moyenne. La puissance électrique d'un dipôle est proportionnelle au carré de la différence de potentiel. Pour une tension $s(t)$ quelconque dépendant du temps, la quantité P_s définie par

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^{t=T} s^2(t) dt$$

est proportionnelle à la puissance moyenne du dipôle sur une période. Ainsi pour $s(t) = e(t)$, on a :

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^{t=T} e^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t=T} E_m^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{E_m^2}{T} \int_0^{t=T} 1 + \cos(2\omega t) dt = \frac{E_m^2}{2}$$

D'autre part pour une tension continue U , la quantité P_U est :

$$P_U = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt = U^2$$

La tension efficace est de la tension e est la valeur de U telle que $P_U = P_e$, soit :

$$U^2 = \frac{E_m^2}{2}$$

La tension efficace U est donc :

$$U = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

II. Caractéristiques de la tension $u_c(t)$

II.1. L'impédance d'une capacité est donnée par la relation classique :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

II.2. Le dipôle AB est le montage série d'une capacité C d'une inductance L et d'une résistance R . Les impédances de chacun de ces dipôles s'additionnent. Ainsi :

$$Z_{AB} = R + Z_C + jL\omega$$

Soit

$$Z_{AB} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

II.3. Décidément cette coquille d'énoncé revient souvent. L'impédance réelle d'un dipôle **n'est pas** une notion académique. Un dipôle en régime sinusoïdal forcé possède une impédance complexe qui a une partie réelle et une partie imaginaire, ou ce qui est équivalent un argument et un module. Face à une telle ambiguïté, il faut absolument spécifier la quantité que l'on exprime. On peut comprendre la question de deux façons différentes, sans préférence pour l'une ou l'autre (tellement c'est peu clair...)

1. Il faut chercher les conditions pour lesquelles l'impédance complexe Z_{AB} est réelle, c'est à dire de partie imaginaire nulle ou négligeable. Tel est le cas lorsque la pulsation ω a la valeur particulière qui annule la partie imaginaire. On est alors à la résonance du circuit. Ainsi :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Z_{AB} = R$$

2. Puisque l'énoncé nous a fait calculer des tensions efficaces, une autre façon de comprendre cette question est d'imaginer que l'on cherche l'impédance obtenue par le rapport de la tension efficace au courant efficace, que l'on pourrait mesurer, par exemple, avec un voltmètre et un ampèremètre. On obtient ainsi une valeur réelle qui est la résistance du dipôle à une pulsation ω donné. Cette quantité n'est rien d'autre que le module de l'impédance complexe du dipôle soit :

$$|Z_{AB}| = \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right)^{1/2}$$

II.4. Le nombre complexe \underline{z} est l'inverse de la fonction de transfert. On a :

$$\underline{z} = \frac{e}{\underline{u}_c}$$

Pour le condensateur, on a la relation entre la tension et l'intensité :

$$\underline{u}_c = Z_C i$$

Et d'autre part :

$$e = Z_{AB} i$$

Il vient donc :

$$\underline{e} = \frac{Z_{AB}}{Z_C} \underline{u}_c$$

d'où

$$\underline{z} = \frac{Z_{AB}}{Z_C}$$

Soit :

$$\underline{z} = 1 - LC\omega^2 + jRC\omega$$

II.5. On a la relation :

$$\underline{u}_c = \frac{e}{\underline{z}}$$

Il vient donc :

$$|\underline{u}_c| = \frac{|e|}{|\underline{z}|}$$

Or $U_m = |\underline{u}_c|$ et $E_m = |e|$ D'où

$$U_m = \frac{E_m}{((1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2)^{1/2}}$$

II.6. Notons φ_e l'argument de \underline{e} , et φ_z celui de \underline{z} . L'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments de chacun des facteurs. Il vient donc, puisque $\varphi_e = 0$:

$$\varphi = \varphi_e - \varphi_z = -\varphi_z$$

D'autre part, la tangente de l'argument est le rapport des parties imaginaire et réelle. Ainsi :

$$\tan \varphi = -\tan \varphi_z = \frac{\Im \underline{z}}{\Re \underline{z}} = -\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

D'où

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right)$$

II.7. II.7. 1.

$$U_m = \frac{10}{((1 - 2 \times 5.10^{-6} \times 10^6)^2 + (10^3 \times 5.10^{-6} \times 10^3)^2)^{1/2}} \sim 0,97 \text{ V}$$

II.7. 2.

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{10^3 \times 5.10^{-6} \times 10^3}{1 - 2 \times 5.10^{-6} \times 10^6} \right) \sim 0,5 \text{ rad}$$

C CORPS PUR : TRANSFORMATION D'UNE MASSE DE DIOXYDE DE SOUFRE

I. Etape I : A vers B

I.1. Au point A, le système est principalement sous phase gazeuse. La pression totale du système est la pression de vapeur saturante $P^*(T_0)$ et le gaz coexiste donc avec une gouttelette de liquide. Le système est donc à l'équilibre. Le point A se situe donc sur la courbe de rosée (Coexistence stable liquide-vapeur) du diagramme $P - V$ du soufre comme indiqué sur la figure 2009.5. L'état B se caractérise par la même température T_0 et la même pression $P^*(T_0)$ puisque l'énoncé explique que le liquide est à l'équilibre avec une bulle de gaz. Ainsi la seule différence entre les états A et B est le volume qu'occupe le système. Le système passe de A à B par une isotherme T_0 comme indiqué sur la figure 2009.5.

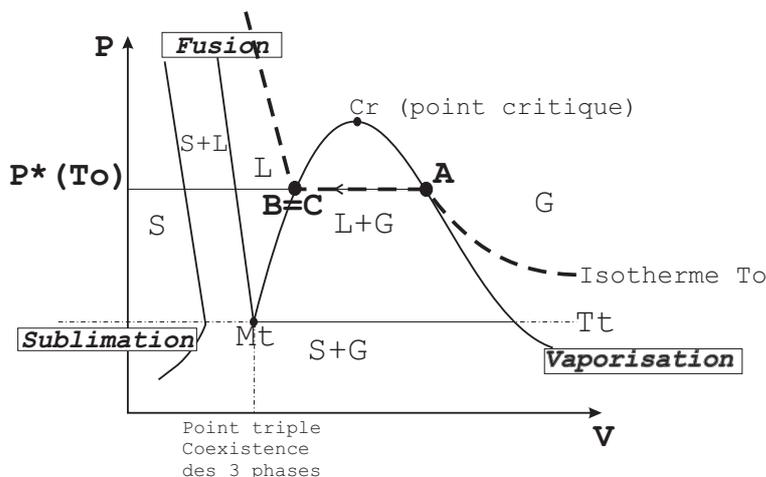


FIG. 2009.5 – Diagramme P, V de phases du Soufre

La représentation de ces deux états est schématisé sur la figure 2009.6 en diagramme P, T . Puisque le volume n'y apparait pas comme variable les points A et B sont confondus sur la courbe de rosée de ce diagramme.

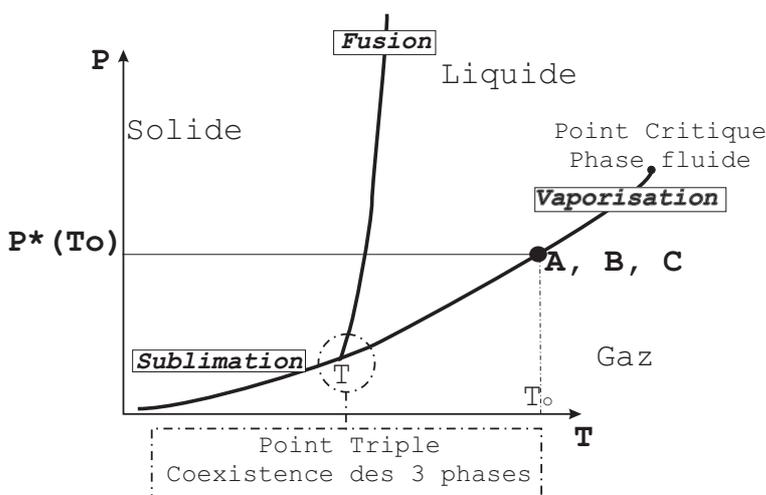


FIG. 2009.6 – Diagramme P, T de phases du Soufre

I.2. Petite ambiguïté d'énoncé : la variable A représente à la fois l'ensemble des variables d'état de l'état initial mais aussi la surface du piston. Il est bien évident que dans cette question la "donnée" A de l'énoncé fait référence à la surface du piston. Pour éviter toute erreur de calcul

littéral, il vaut mieux invoquer cette variable A dans les dernières étapes de calcul.

I.2. 1. Pour un système, le travail élémentaire δW échangé lors d'une transformation élémentaire qui fait varier le volume de dV est :

$$\delta W = -P_{\text{ext}}dV$$

Lors du passage de A à B, la pression reste constante à $P^*(T_0)$ (très lente descente du piston). on a donc :

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = - \int_{V(A)}^{V(B)} P^*(T_0)dV = -P^*(T_0)(V(B) - V(A))$$

Comme le volume du liquide $V(B)$ est négligé devant celui du gaz $V(B)$, le travail s'exprime donc :

$$W_{AB} = P^*(T_0)V(A) = P^0V(A)$$

D'autre part, le gaz est considéré comme gaz parfait, il existe donc la relation au point A :

$$P^*(T_0)V(A) = \frac{m}{M}RT_0$$

On peut aussi exprimer le volume $V(A)$ comme :

$$V(A) = A \times H$$

Il vient donc deux expressions équivalentes pour le travail :

$$W_{AB} = P^0AH = \frac{m}{M}RT_0$$

I.2. 2. La chaleur échangée par le corps est utilisée pour le changement de phase à température constante. Ainsi :

$$Q_{AB} = -m\Delta_{\text{vap}}h(T_0)$$

Le signe "-" correspond au fait que, de A vers B, on liquéfie (inverse de l'évaporation) le corps.

I.2. 3. Le premier principe indique que

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} + W_{AB}$$

D'où, d'après les deux dernières questions :

$$\Delta U_{AB} = -m\Delta_{\text{vap}}h(T_0) + P^0AH = -m\Delta_{\text{vap}}h(T_0) + \frac{m}{M}RT_0$$

I.2. 4. Pour une transformation **quasi-statique** (le système est à l'équilibre durant toute la transformation, la température y est donc bien définie), la variation élémentaire d'entropie est :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Ici la transformation se fait à température constante T_0 , de façon quasi-statique d'où :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{Q_{AB}}{T_0}$$

D'où

$$\Delta S_{AB} = -\frac{m\Delta_{\text{vap}}h(T_0)}{T_0}$$

II. Etapes B vers C et C vers A

II.1. Puisque la vanne reste fermée, l'état C du système est rigoureusement le même que celui de l'état B. Il n'y a eu aucune transformation entre les états B et C. **II.2.** De même qu'à la question I.1, le travail élémentaire lors de la transformation de C vers A peut s'écrire :

$$\delta W_{CA} = -P_{\text{ext}}dV$$

Par contre ici, la détente lieu dans le vide (pour effectuer une détente à pression connue et constante, il aurait fallu laisser le piston libre, ainsi le gaz aurait occupé à tout instant de la transformation le volume correspondant à la fraction massique du corps sous forme gazeuse et à la pression $P^*(T_0)$). On a donc $P_{ext} = 0$ D'où

$$\delta W_{CA} = 0$$

Donc

$$W_{CA} = 0$$

III. Etude du cycle

III.1. Les fonctions U et S sont des fonctions d'état. Leur variation respective lors d'une transformation **ne dépendent donc que** de l'état final et de l'état initial. Un cycle est une série de transformations qui finit par ramener le système dans l'état du début. Les états finaux et initiaux sont donc identiques. On a donc :

$$\Delta U_{AA} = 0 \text{ et } \Delta S_{AA} = 0$$

III.2. III.2. 1. Il nous faut décomposer le cycle :

$$\Delta U_{AA} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{CA} = W_{AB} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{CA} = 0$$

D'après la partie précédente $W_{CA} = 0$. Notant $Q = Q_{AB} + Q_{CA}$ et $W = W_{AB}$, il vient donc :

$$Q = -W_{AB} = -P^o AH = -\frac{m}{M} RT_0$$

III.2. 2. On peut schématiser la transformation comme une machine monotherme représentée sur la figure 2009.7. Le système SO_2 est relié à un thermostat Th de température fixe T_0 et à un opérateur Op qui peut échanger avec le système SO_2 uniquement du travail. Cet opérateur échange aussi uniquement du travail durant la transformation BC avec un réservoir de Pression à P_0 . Cet échange n'a pas d'incidence sur le bilan exposé ici mais il est indispensable à l'ensemble du cycle. **Durant le cycle** AA , l'opérateur échange le travail W algébrique (compté positivement si reçu par SO_2) et

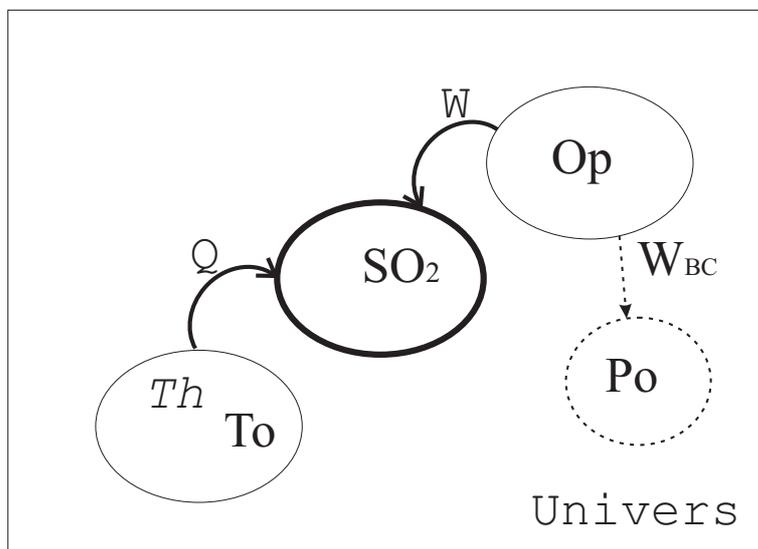


FIG. 2009.7 – Schéma de la transformation vue par l'univers

le thermostat échange la chaleur Q (comptée positivement si reçu par SO_2) avec SO_2 . Le thermostat est à l'équilibre thermique en permanence à température T_0 . Pendant le cycle il échange la chaleur $-Q$ (voir la figure 2009.7) avec le système SO_2 . Sa variation d'entropie est donc

$$\Delta S(Th) = -\frac{Q}{T_0} = \frac{m}{M} R$$

IV. Application numérique

IV.1.

$$Q_{AB} = -m\Delta_{vap}h(T_0) = -\frac{MP^0AH}{RT_0}\Delta_{vap}h(T_0) = 4,00 \times 10^5 \frac{10^5 \times 2,0 \cdot 10^{-2} \times 0,5 \times 64 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 263} \sim 11,7 \text{ kJ}$$

IV.2. *Considérons l'Univers, noté Ω , composé du système (SO_2), du thermostat (Th) et de l'opérateur (Op). On va s'attacher maintenant à faire le bilan entropique de l'Univers sur le cycle. Par extensivité de la fonction entropie, il vient :*

$$\Delta S(\Omega_c) = \Delta S_{AA}(SO_2) + \Delta S_{AA}(Th) + \Delta S_{AA}(Op)$$

D'autre part le second principe nous indique que la variation d'entropie de l'univers est la somme de l'entropie échangée (S_e) par l'univers et l'entropie créée (S_i) de façon interne par le fait que certaines transformations peuvent être non quasi statique. Soit :

$$\Delta S(\Omega_c) = S_e + S_i$$

S_i est nulle si toutes les transformations sont quasi-statiques, et strictement positive sinon. On a donc en généralité $S_i \geq 0$.

L'univers étant isolé, S_e est nulle. Le second principe nous indique donc que :

$$\Delta S(\Omega_c) = S_i = \Delta S_{AA}(SO_2) + \Delta S_{AA}(Th) + \Delta S_{AA}(Op) \geq 0$$

1. $\Delta S_{AA}(SO_2) = 0$ car la transformation est un cycle et S une fonction d'état
2. $\Delta S_{AA}(Op) = 0$ car l'opérateur n'échange que du travail. Pour un système fermé, l'échange d'entropie ne peut se faire que par le moyen d'un échange de chaleur.

Il vient donc :

$$\Delta S(\Omega_c) = \Delta S_{AA}(SO_2)$$

Et d'après la partie précédente :

$$\Delta S(\Omega_c) = S_i = \Delta S_{AA}(SO_2) = \frac{m}{M}R > 0$$

Cette quantité est strictement positive. Elle ne peut être nulle que si $m = 0$. A ce moment là, il n'y a pas de transformation...

La variation de l'entropie de l'Univers est positive pour ce cycle. Il est donc irréversible. Cette irréversibilité est liée à la transformation $C \rightarrow A$. En effet, au moment où l'on ouvre la vanne, le système se retrouve dans l'état liquide à pression quasi nulle. Cet état est un état très éloigné des conditions d'équilibre à cette pression là. La transformation ne peut donc pas se faire proche d'un état d'équilibre.

—

D DIFFUSION DE NEUTRONS DANS L'EAU LOURDE

I. Le milieu n'absorbe pas les neutrons

I.1. Le flux $\Phi(x)$ qui traverse la section S est par définition du vecteur $\vec{j}(x)$

$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Le vecteur surface élémentaire \vec{dS} est un vecteur orthogonal à la surface S , de norme égale à la surface élémentaire dS . Dans le cas monodimensionnel, il vient :

$$\vec{dS} = dS \vec{e}_x$$

D'autre part, le vecteur $\vec{j}(x)$ est supposé uniforme sur la surface S (il ne dépend donc que de x) et il est orienté selon l'axe des x . Soit :

$$\vec{j}(x) = j(x) \vec{e}_x$$

D'où, ici :

$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint_S j(x) dS \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \iint_S j(x) dS$$

Puisque $j(x)$ est uniforme sur la surface S , il vient :

$$\boxed{\Phi(x) = j(x)S}$$

I.2. Cette question concerne les équations de conservation. On peut la résoudre comme le propose l'énoncé par un bilan sur un volume élémentaire. Cette méthode peut être lourde à mettre en œuvre dans les détails (en particulier de signe). On peut aussi la résoudre en invoquant les lois locales de conservation (méthode plus abstraite mais plus rapide). Dans le cadre de ce corrigé, on propose les deux méthodes.

I.2. 1. Méthode de l'énoncé.

Le volume élémentaire $d\tau$ composé du tronçon de tube de longueur dx et de surface S est :

$$d\tau = S dx$$

A l'instant t , durant le laps de temps δt , la quantité de neutrons $N_\tau(t)$ contenue dans le volume $d\tau$ a varié d'une quantité élémentaire δN . Soit :

$$\delta N = N_\tau(t + \delta t) - N_\tau(t) = \frac{\partial N_\tau}{\partial t} \delta t$$

D'autre part, d'un point de vue descriptif, durant le laps de temps δt , il entre dans le volume $d\tau$ la quantité N_e de neutrons et il en sort la quantité N_s , avec :

$$N_e = \Phi(x) \delta t \text{ et } N_s = \Phi(x + dx) \delta t$$

La quantité $N_e - N_s$ représente la différence du flux entrant et du flux sortant et représente donc la quantité algébrique de neutrons qui sont entrés au total dans le volume pendant δt .

$$N_e - N_s = \Phi(x) \delta t - \Phi(x + dx) \delta t = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx \delta t = -\frac{\partial j}{\partial x} S dx \delta t$$

Si la quantité totale de neutrons se conserve (c'est le cas ici, mais pas dans la partie suivante), la quantité $N_e - N_s$ représente la variation de neutrons dans le volume. Dit crûment : "Ce qui entre moins ce qui sort est égal à ce qui reste". Ce raisonnement est valable si dans le volume, il n'existe pas de phénomènes physiques qui crée ou absorbe des neutrons. C'est bien le cas ici. Il vient donc :

$$N_e - N_s = \delta N_\tau$$

Ce qui devient donc :

$$-\frac{\partial j}{\partial x} S dx \delta t = \frac{\partial N_\tau}{\partial t} \delta t$$

Ici, la non accumulation de neutrons se traduit par :

$$\frac{\partial N_\tau}{\partial t} = 0$$

Il vient donc :

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

Intégrant cette équation selon x , il vient :

$$j(x) = j_0(\text{constante})$$

La loi de Fick rappelée dans l'énoncé s'écrit donc :

$$-D \frac{\partial N^*}{\partial x} = j_0$$

Puisque N^* ne dépend que de x , on intègre cette dernière relation et il vient :

$$N^* = -\frac{j_0}{D}x + K \text{ avec } K \text{ constante}$$

Ce qui est bien une fonction affine.

I.2. 2. Méthode par équation locale de conservation.

De façon générale, une équation locale de conservation de la quantité physique Ψ (par exemple masse, énergie, charge électrique, quantité de matière) s'écrit :

$$\text{div} \vec{j}_\Psi + \frac{\partial \rho_\Psi}{\partial t} = s_\Psi$$

où \vec{j}_Ψ est le vecteur densité de courant de la quantité étudiée Ψ , ρ_Ψ est la densité volumique de la quantité Ψ et s_Ψ est la quantité volumique de Ψ qui apparaît (ou disparaît, s est alors négatif) au point M par unité de temps. C'est un terme source (ou un puits).

Ici Ψ est la quantité de neutrons. On a donc $\rho_\Psi = N^*$ et $\vec{j}_\Psi = \vec{j}$. D'autre part, dans cette partie, on spécifie bien qu'il n'y a pas d'accumulation de neutrons dans le volume du tube et que le milieu n'absorbe pas les neutrons. On a donc :

$$s = 0 \text{ et } \frac{\partial N^*}{\partial t} = 0$$

L'équation de conservation des neutrons :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial N^*}{\partial t} = s_N$$

devient donc :

$$\text{div} \vec{j} = 0$$

D'après la loi de Fick, ceci devient :

$$-D \text{divgrad} N^* = 0$$

Or l'opérateur :

$$\Delta = \text{divgrad}$$

n'est autre que l'opérateur "Laplacien".

Le problème étudié ici est monodimensionnel. Les variables physiques dépendent seulement de x . Cette équation devient donc :

$$\frac{d^2 N^*}{dx^2} = 0$$

Intégrant deux fois cette équation, il vient :

$$N^*(x) = Ax + B \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes fixées par les conditions aux limites}$$

I.3. Pour finir de résoudre cette équation, il faut invoquer les conditions aux limites, à savoir :

$$N^*(x = 0) = N_1^* \text{ et } N^*(x = l) = N_2^*$$

Il nous vient donc deux équations :

$$B = N_1^* \text{ et } N_2^* = Al + N_1^*$$

D'où :

$$N^*(x) = \frac{N_2^* - N_1^*}{l}x + N_1^*$$

I.4. La courbe représentative est donc une droite comme indiqué sur la figure 2009.8

II. Milieu absorbant

II.1. Tout l'intérêt de la méthode de l'équation locale se trouve ici. On rappelle l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial N^*}{\partial t} = s_N$$

Ici on a un puits à neutrons qui fait disparaître les neutrons du bilan, **sans que la densité soit modifiée**. On a donc :

$$s_N = -C$$

(puisque C est une donnée positive et que les neutrons sont absorbés) et

$$\frac{\partial N^*}{\partial t} = 0$$

D'où l'équation :

$$\operatorname{div} \vec{j} = -C$$

Utilisant la loi de Fick comme à la partie précédente, il vient :

$$-D \frac{d^2 N^*}{dx^2} = -C$$

D'où en intégrant deux fois :

$$N^*(x) = \frac{C}{2D}x^2 + C_1x + C_2$$

avec C_1 et C_2 deux constantes d'intégrations fixées par les conditions aux limites.

On a

$$N^*(x=0) = N_1^* = C_2 \text{ et } N^*(x=l) = \frac{C}{2D}l^2 + C_1l + N_1^* = N_2^*$$

D'où

$$C_1 = \frac{N_2^* - N_1^*}{l} - \frac{C}{2D}l$$

Et donc :

$$N^*(x) = \frac{C}{2D}x^2 + \left(\frac{N_2^* - N_1^*}{l} - \frac{C}{2D}l \right)x + N_1^*$$

II.2. Vérifions que le calcul est valable. Résolvons en x l'équation

$$N^*(x) = N_1^* \text{ Soit } \frac{C}{2D}x^2 + \left(\frac{N_2^* - N_1^*}{l} - \frac{C}{2D}l \right)x + N_1^* = N_1^*$$

Il vient :

$$\frac{C}{2D}x^2 + \left(\frac{N_2^* - N_1^*}{l} - \frac{C}{2D}l \right)x = 0$$

Les deux solutions sont :

$$x_0 = 0 \text{ et } x_1 = 2D \frac{N_1^* - N_2^*}{lC} + l$$

x_0 est la condition initiale que l'on s'est fixée. $x_1 > l$ est au delà du tuyau T , donc dans le réservoir 2. Cette valeur est donc hors du domaine géométrique de l'étude. D'autre part, le polynôme étant de coefficient principal positif, sa représentation est de forme convexe, avec un minima pour une valeur de $x = x_m$, forcément situé entre x_0 et x_1

On vérifie l'autre limite du problème en résolvant l'équation $N^*(x) = N_2^*$, soit :

$$\frac{C}{2D}x^2 + \left(\frac{N_2^* - N_1^*}{l} - \frac{C}{2D}l \right)x + N_1^* - N_2^* = 0$$

Cette équation possède deux solutions :

$$x_2 = l \text{ et } x_3 = \frac{2D}{Cl} (N_1^* - N_2^*)$$

On a alors deux cas de figure possibles :

1. $x_3 > l$: Alors on observe une décroissance monotone de $N^*(x)$, selon une branche parabolique, dans le tube. La valeur locale de N^* est plus faible que dans le cas sans absorption, comme indiqué sur la figure 2009.8.

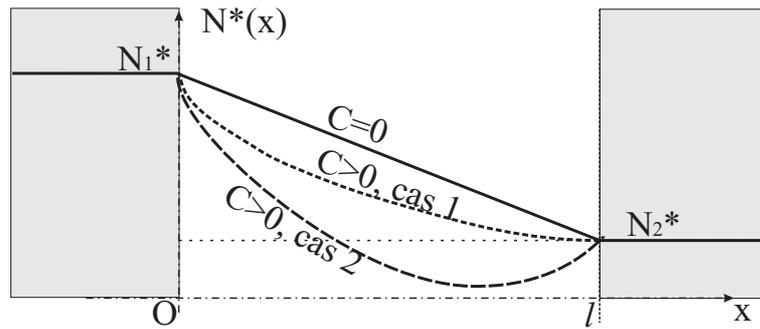


FIG. 2009.8 – $N^*(x)$ dans les différents cas de figure proposés dans la correction

2. $0 < x_3 < l$: La valeur de N^* rejoint la valeur N_2^* avant la fin du tube. Comme la diffusion des neutrons est initiée par la différence de concentration en neutrons, dans toute la partie $x_3 < x < l$, c'est le réservoir 2 qui fournit des neutrons au tube, et la concentration $N^*(x)$ est plus faible que N_2^* . En fait cette étude devrait permettre de dimensionner la longueur du tube en fonction des paramètres physiques C et D et des concentrations N_1^* et N_2^* . En l'absence de données d'ordre de grandeur, il est difficile d'aller plus loin sans entrer dans une étude longue et un peu fastidieuse de la fonction $N^*(x)$. On peut remarquer qu'il se peut aussi qu'il y ait une zone du tube dans laquelle N^* s'annule.

— FIN —

Epreuve de 2010

A LE PHÉNOMÈNE DE SÉDIMENTATION

L'énoncé indique qu'il faudra utiliser des vecteurs densités de courants. Ces derniers sont liés à la quantité de particules qui passent au travers un élément de surface **orientée** pendant un laps de temps donné. L'orientation de l'espace intervient donc dans le signe des quantités algébriques que propose l'énoncé (même si le signe est donné). Il convient donc d'être méticuleux dès le départ et de proposer un schéma le plus clair possible sur les orientations choisies. Nous reprenons le schéma de l'énoncé sur la figure 2010.1. En un point N quelconque, nous faisons figurer les forces \vec{P} , \vec{F}_A , \vec{F}_f . En un point M situé à la cote z , nous faisons figurer, comme l'énoncé, les vecteurs \vec{j}_s et \vec{j}_D . Le cylindre élémentaire de hauteur dz ,

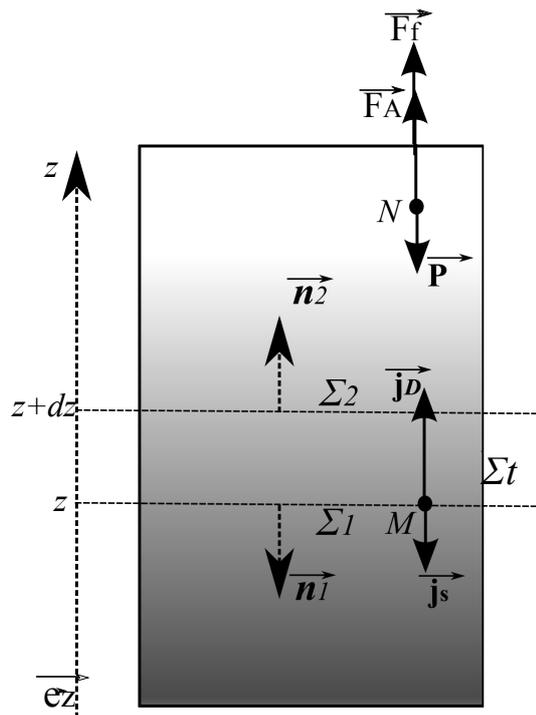


FIG. 2010.1 – Schéma du dispositif de sédimentation

de base S , est borné :

- en haut par la surface Σ_1 orientée dans le sens "sortant" du cylindre, $\vec{n}_1 = +\vec{e}_z$
- en bas par la surface Σ_2 orientée dans le sens "sortant" du cylindre, $\vec{n}_2 = -\vec{e}_z$
- sur le côté par la surface Σ_t orientée localement dans le sens sortant, donc selon un vecteur orthogonal à \vec{e}_z .

I. Déplacement des particules sous l'action des forces de pesanteur.

I.1. Le principe fondamental de la dynamique, relie, dans un référentiel galiléen, les forces physiques à l'accélération que subit un point matériel de masse m . Dans le référentiel du bocal à sédimentation, et notant par $\dot{\vec{v}}$ la dérivée par

rapport au temps du vecteur vitesse, il vient :

$$\boxed{m \dot{\vec{v}} = \vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_f}$$

I.2. Le volume V_p de la particule de rayon R est :

$$V_p = \frac{4}{3} \pi R^3$$

La poussée d'Archimède peut donc s'écrire, d'après la relation donnée par l'énoncé :

$$\vec{F}_A = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g \vec{e}_z = V_p \rho g \vec{e}_z$$

Or, par définition de la masse volumique ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{m}{V_p} \implies V_p = \frac{m}{\rho_0}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\vec{F}_A = V_p \rho g \vec{e}_z = \frac{\rho}{\rho_0} m g \vec{e}_z}$$

I.3. Le vecteur vitesse est décrit par une fonction $v(t)$ telle que $\vec{v} = v(t) \vec{e}_z$.

Le PFD utilisé dans la question 1) donne la relation **vectorielle** suivante :

$$m v(t) \dot{\vec{e}}_z = -m g \vec{e}_z + \frac{\rho}{\rho_0} m g \vec{e}_z - f v(t) \vec{e}_z$$

Soit en faisant le produit scalaire par \vec{e}_z (ou en projetant sur l'axe z), il vient :

$$m \dot{v}(t) = -m g + \frac{\rho}{\rho_0} m g - f v(t)$$

En factorisant :

$$\boxed{\dot{v}(t) + \frac{f}{m} v(t) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) g}$$

I.4. La solution à cette équation est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée (SGEHA) et d'une solution particulière (SP). La résolution de telles équations se fait en trois points :

- Résolution de l'EGHA.
- Trouver une solution particulière
- Déterminer les constantes (Ce point est à faire en dernier!!)

Soit la fonction $v_g(t)$ vérifiant l'équation homogène :

$$\dot{v}_g + \frac{f}{m} v_g = 0$$

Alors $v_g(t)$ est de la forme :

$$v_g(t) = \alpha \exp \left[-\frac{f}{m} t \right]$$

où α est une constante que l'on déterminera tout à la fin du raisonnement. Pour chercher une solution particulière une méthode consiste à chercher une fonction $v_{pa}(t)$ qui ne dépend pas du temps (constante). Il est évident que la fonction constante :

$$v_{pa} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$$

vérifie l'équation différentielle de la question 3). La solution cherchée pour la vitesse est donc :

$$v(t) = \alpha \exp \left[-\frac{f}{m} t \right] + \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$$

Pour conclure la question, il faut déterminer α . Pour cela on applique les conditions initiales :

$$v(t=0) = 0$$

Or d'après la forme générale de la solution :

$$v(t=0) = \alpha + \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$$

D'où nécessairement :

$$\alpha = - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$$

Soit en factorisant :

$$v(t) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f} \left[1 - \exp \left(- \frac{f}{m} t \right) \right]$$

I.5. Lorsque le temps devient long :

$$t \rightarrow \infty, v(t \rightarrow \infty) \sim \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$$

Soit $v_{lim} = v(\infty) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{m g}{f}$.

Cette quantité est négative puisque $\rho < \rho_0$, et c'est un résultat attendu puisque la macro molécule aura tendance à descendre sous l'effet de son propre poids. L'énoncé demande la valeur absolue de cette quantité :

$$|v_{lim}| = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{m g}{f}$$

I.6.

I.6. 1. En régime permanent stationnaire établi, la vitesse ne dépend plus du temps. On a alors $\dot{v} = 0$. La vitesse algébrique des particules est donc égale à v_{lim} . Pendant le laps de temps dt les particules se sont déplacés le long d'un vecteur élémentaire \vec{dh} et ont parcouru la distance algébrique dh :

$$\vec{dh} = v_{lim} dt \vec{e}_z = dh \vec{e}_z$$

Les particules qui passent au travers la surface S durant entre la date t et la date $t + dt$ sont toutes les particules qui à l'instant t sont contenues dans le cylindre de base S et de hauteur $|dh|$. Le nombre $N^*(z)$ de particules traversant la surface est le nombre de particules contenues dans le cylindre de section S et de hauteur $|dh|$. Le volume élémentaire $d\tau$ de ce cylindre est :

$$d\tau = |dh|S = |v_{lim} dt|S$$

Or, par définition de la quantité $N^*(z)$, on a la relation

$$N^*(z) = \frac{\delta N_S}{d\tau}$$

D'où

$$\delta N_S = N^*(z) d\tau = N^*(z) |v_{lim} dt| S$$

En utilisant l'expression de $|v_{lim}|$ obtenue à la question précédente, il vient :

$$\delta N_S = N^*(z) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{m g}{f} S dt$$

I.6. 2. Le vecteur densité de courant de matière \vec{j}_S vérifie d'après notre schéma (figure 2010.1) sur le cylindre de hauteur dz :

$$\vec{j}_S \cdot \vec{n}_1 S dt = \delta N_S$$

En multipliant scalairement par \vec{e}_z , il vient :

$$\vec{j}_S = - \frac{\delta N_S}{S dt} \vec{e}_z$$

Soit, en utilisant l'expression de δN_S établie en a), il vient

$$\vec{j}_S = -N^*(z) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{m g}{f} \vec{e}_z$$

Remarque : On peut voir que la relation précédente peut aussi s'écrire :

$$\vec{j}_S = N^*(z) \vec{v}$$

puisque $\vec{v} = v_{lim} \vec{e}_z$ en régime stationnaire permanent établi. On a re-démontré dans ces deux questions une relation de cours générale sur les vecteurs densités de courants (électriques ou matériels). Le vecteur densité de courant est le

produit de la vitesse en régime stationnaire avec la densité volumique. Si le cours est bien connu, la relation du b) peut se justifier comme cela.

II. Diffusion due à l'hétérogénéité

II.1. Avec exactement le même raisonnement que pour le vecteur \vec{j}_S , nous obtenons, en projetant maintenant sur \vec{n}_2 (Figure 2010.1) :

$$\vec{j}_D = \frac{\delta N_D}{S dt} \vec{n}_2$$

Soit :

$$\vec{j}_D = \frac{\delta N_D}{S dt} \vec{e}_z$$

II.2. La loi de Fick amène :

$$\vec{j}_D = j_D(z) \vec{e}_z = -D \nabla N^*(z) \implies j_D(z) = -D \frac{dN^*}{dz}$$

Et donc d'après la question précédente, il vient :

$$\frac{\delta N_D}{S dt} = -D \frac{dN^*}{dz}$$

III. Equilibre

III.1. Dans le bocal de sédimentation, il n'y a pas d'apport de matière. De fait, la densité N^* ainsi que les vecteurs densité de courants doivent vérifier la conservation de la matière (ou de la masse). Cette conservation est traduite par la loi locale :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial N^*}{\partial t} = 0$$

où $\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_S$ est la somme de tous les vecteurs densités de courants.

En régime permanent la quantité $\frac{\partial N^*}{\partial t}$ est nulle. Le vecteur \vec{j} vérifie donc :

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet de formuler cette égalité sous forme intégrale de flux sortant (noté Φ) d'une surface fermée Σ , d'élément différentiel local $d\Sigma$, orientée localement vers son extérieur par un vecteur \vec{n}_e normal à la surface et qui délimite un volume \mathcal{V} , d'élément différentiel élémentaire $d\tau$:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j} \, d\tau = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}_e \, d\Sigma$$

De la relation de conservation locale de la matière, il vient donc que le flux sortant de n'importe quelle surface fermée est nulle. Le bilan du flux sortant du cylindre de hauteur ha quelconque et de surface S s'écrit :

$$\Phi(S) = \oiint_{\Sigma} \vec{j} \cdot \vec{n}_e \, d\Sigma = 0$$

En décomposant la surface fermante du cylindre comme indiqué sur la figure 2010.2 il vient :

$$\begin{aligned} \Phi(S) &= \oiint_{\Sigma} (\vec{j}_D + \vec{j}_S) \cdot \vec{n}_e \, d\Sigma \\ \implies 0 &= \underbrace{\iint_{\Sigma_1} (\vec{j}_D(z) + \vec{j}_S(z)) \cdot \vec{n}_1 \, d\Sigma}_{-j_D(z) + j_S(z)} + \underbrace{\iint_{\Sigma_2} (\vec{j}_D(z+ha) + \vec{j}_S(z+ha)) \cdot \vec{n}_2 \, d\Sigma}_{j_D(z+ha) - j_S(z+ha)} + \underbrace{\iint_{\Sigma_t} (\vec{j}_D + \vec{j}_S) \cdot \vec{n}_t \, d\Sigma}_{0(\vec{n}_t \text{ perpendiculaire à } \vec{e}_z)} \end{aligned}$$

Cette égalité doit être vérifiée **quelle que soit la valeur de ha** . Ainsi la seule façon d'annuler la somme des vecteurs densités de courants est que à toutes côte z :

$$\forall z, j_D(z) + j_S(z) = 0 \text{ soit } j_D(z) = -j_S(z)$$

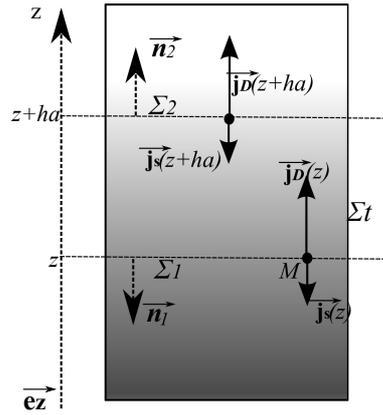


FIG. 2010.2 – Surface cylindrique fermé et orientation des vecteurs

Il vient donc en utilisant les relations établies en I et II :

$$-\frac{\delta N_S}{S dt} = -\frac{\delta N_D}{S dt}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\delta N_S = \delta N_D}$$

III.2. Or d'après II.2 on a la relation :

$$\delta N_D = -D \frac{dN^*}{dz} S dt$$

Et d'après I.6 on a la relation :

$$\delta N_S = N^*(z) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{m g}{f} S dt$$

D'où

$$\delta N_S = \delta N_D \implies N^*(z) \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{m g}{f} = -D \frac{dN^*}{dz}$$

L'équation différentielle que vérifie N^* est alors :

$$\frac{dN^*}{dz} + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) \frac{m g}{D f} N^*(z) = 0$$

Soit :

$$\boxed{\frac{dN^*}{dz} + \frac{|v_{lim}|}{D} N^* = 0}$$

III.3. La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$N^*(z) = A \exp \left[-\frac{|v_{lim}|}{D} z \right]$$

La constante A s'obtient par la condition initiale :

$$N^*(z = 0) = A = N_0^*$$

D'où

$$\boxed{N^*(z) = N_0^* \exp \left[-\frac{|v_{lim}|}{D} z \right]}$$

III.4. L'allure de la courbe $N^*(z)$ est représentée sur la figure 2010.3. La distance caractéristique d'atténuation z_a de cette exponentielle est :

$$z_a = \frac{D}{|v_{lim}|} = \frac{D f}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) m g}$$

III.5. Remarque : La statistique de Boltzmann fait intervenir une loi de distribution sous forme d'un facteur exponentiel formé du rapport entre l'énergie de la particule et l'énergie "thermique" $k_B T$ du système. La particule de masse m est

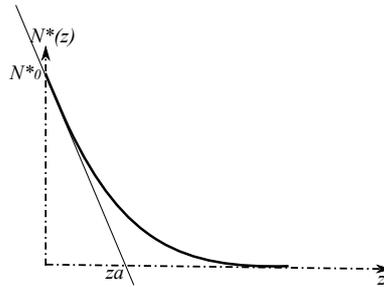


FIG. 2010.3 – Allure de la courbe $N^*(z)$

soumise à un ensemble de forces mécanique dérivant d'un potentiel. Ainsi la contribution du poids et de la poussée d'Archimède s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F}_A = \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) m g \vec{e}_z$$

Cet ensemble de forces dérive de l'énergie potentielle E_p avec origine en $z = 0$:

$$E_p(z) = - \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) m g z$$

Si l'on écrit le facteur de Boltzmann classiquement sous la forme :

$$N^*(z) = N_0^* \exp \left[- \frac{E_p(z)}{k_B T} \right]$$

on retrouve bien la formule de l'énoncé.

Afin de trouver la relation qui lie les paramètres macroscopiques du fluide de particules (f, D) à la température, il suffit d'égaliser l'expression de la statistique de Boltzmann avec celle trouvée en 3). Soit :

$$N_0^* \exp \left[- \frac{|v_{lim}|}{D} z \right] = N_0^* \exp \left[- \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) m g}{k_B T} z \right]$$

Puisque

$$|v_{lim}| = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{m g}{f}$$

Il vient immédiatement :

$$\boxed{D f = k_B T}$$

III.6. Il suffit de remplacer f par l'expression donnée par l'énoncé. Ainsi :

$$6\pi R \eta D = k_B T$$

Donc

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{6\pi R \eta}}$$

IV. Mesures et résultats

IV.1. L'énoncé stipule :

$$N^*(z_1) = N_0^*/3$$

Soit :

$$\exp \left[- \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) m g}{k_B T} z_1 \right] = \frac{1}{3}$$

Il vient donc en prenant le logarithme népérien de l'expression :

$$\boxed{m = \frac{k_B T}{\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) g z_1} \ln 3}$$

Or

$$m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0$$

Soit

$$R = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3}$$

L'application numérique donne :

$$m = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298}{\left(1 - \frac{10^3}{1,25 \cdot 10^3}\right) 9,81 \times 4 \cdot 10^{-2}} \ln 3 = 5,76 \cdot 10^{-20} \text{ kg}$$

et

$$R = \left(\frac{3 \times 5,76 \cdot 10^{-20}}{4 \times 3,14 \times 1,25 \cdot 10^3} \right)^{1/3} = 2,22 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 22,2 \text{ nm}$$

IV.2. La relation

$$D = \frac{k_B T}{6\pi R \eta}$$

se traduit numériquement par

$$D = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \times 298}{6 \times 3,14 \times 2,22 \cdot 10^{-9} \times 1,00} = 9,83 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Remarque : La relation obtenue entre D , f et T est une relation générale que l'on retrouve dans le cadre de la Thermodynamique et de la Physique statistique sous l'appellation "Théorème ou relation de fluctuation-dissipation". Des paramètres de description macroscopique d'un système tendant vers l'équilibre sont mis en lien avec la notion de fluctuation thermique. Il est à noter que cette relation peut aussi servir de thermomètre. Imaginons un système pour lequel D et f sont précisément connus, alors la relation fluctuation-dissipation permet de connaître la température du système. Actuellement, certaines expériences de Physique utilisent ce résultat pour connaître la température de système microscopiquement ordonnés et difficiles d'accès.

—

B ÉTUDE D'UN FILTRE ACTIF

I. Montage préliminaire

I.1. L'amplificateur opérationnel est utilisé en régime linéaire (rétroaction). Dans ce cadre de fonctionnement, le

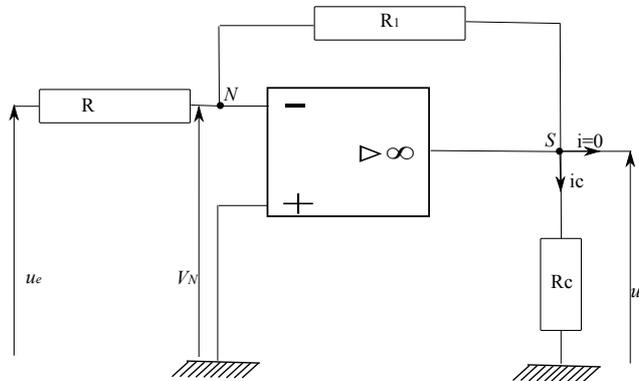


FIG. 2010.4 – Schéma de montage à Amplificateur opérationnel

potentiel aux deux bornes (+ et -) de l'AO sont identiques. On a donc, au point N :

$$V_N = V_+ = 0$$

I.2. Le théorème de Millman appliqué en N, donne :

$$V_N = \frac{\frac{u_s}{R_1} + \frac{u_e}{R}}{\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R}}$$

Comme $V_N = 0$, il vient :

$$\frac{u_s}{R_1} + \frac{u_e}{R} = 0$$

Soit :

$$\frac{u_s}{u_e} = -\frac{R_1}{R}$$

I.3. C'est un amplificateur inverseur. I.4. La loi d'Ohm :

$$u_s = R_c i_c$$

Soit

$$-\frac{R_1}{R} u_e = R_c i_c$$

D'où :

$$i_c = -\frac{R_1}{R R_c} u_e$$

I.5. Application numérique

$$i_c = -\frac{10^3}{10^2 \times 0,5 \cdot 10^3} 0,5 = 10^{-2} \text{ A}$$

II. Filtre actif

II.1. En basse fréquence, une capacité se comporte comme un interrupteur ouvert. Le circuit est alors équivalent au schéma de la figure 2010.4. La tension de sortie est alors l'opposée de la tension d'entrée à un facteur multiplicatif près. En haute fréquence, au contraire la capacité se comporte comme un fil. La tension de sortie est alors égale à V_N , elle même nulle. Le montage a donc une réponse telle que :

- A basse fréquence, la tension de sortie est proportionnelle à la tension d'entrée.

– A haute fréquence, la tension de sortie est nulle.

Ce filtre est un passe-bas : il laisse passer les faibles fréquences. **II.2.** Sur la figure 2010.5, est représentée l'impédance complexe Z_0 formée par la résistance R_1 mise en parallèle avec la capacité C .

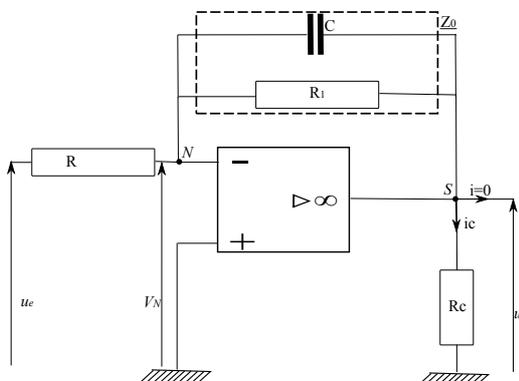


FIG. 2010.5 – Impédances équivalentes

D'après la partie précédente et le théorème de Millman, il vient :

$$V_N = \frac{\frac{u_s}{Z_0} + \frac{u_e}{R}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{R}} = 0$$

D'où

$$\frac{u_s}{u_e} = H_2(j\omega) = -\frac{Z_0}{R}$$

D'autre part, l'impédance complexe Z_C d'une capacité C s'écrit :

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Donc

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{R_1} + jC\omega$$

Soit

$$\frac{R}{Z_0} = \frac{R}{R_1} + jRC\omega$$

D'où

$$\boxed{H_2(j\omega) = -\frac{1}{\frac{R}{R_1} + jRC\omega}}$$

II.3. C'est un filtre du premier ordre puisque la relation entre les tensions d'entrée et de sortie est une fonction qui dépend linéairement de ω . Elle fait donc intervenir une dérivée du premier ordre en temps. **II.4.** Le gain G_2 de ce filtre est le module de la fonction de transfert complexe, soit :

$$\boxed{G_2 = |H_2(j\omega)| = \left[\frac{1}{\left(\frac{R}{R_1}\right)^2 + (RC\omega)^2} \right]^{1/2}}$$

II.5. Cette fonction est monotone et décroissante en fonction de ω . On peut distinguer (comme dans la question 1) deux régimes de fonctionnements :

$$RC\omega \ll \frac{R}{R_1} \implies G_2 \sim \frac{R_1}{R} \text{ (comportement basse fréquence du I)}$$

et

$$RC\omega \gg \frac{R}{R_1} \implies G_2 \sim \frac{1}{RC\omega} \text{ (comportement basse fréquence du I)}$$

Dans le cas "haute fréquence", la fonction représentant G_2 en fonction de ω a une forme hyperbolique. Ainsi nous pouvons tracer l'allure de la courbe du gain comme sur la figure 2010.6. Il paraît clairement que :

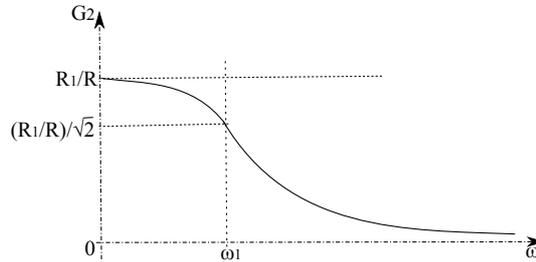


FIG. 2010.6 – Allure du gain en fonction de la fréquence

$$G_{2,max} = \frac{R_1}{R} \text{ est obtenue en } \omega = 0$$

II.6. La bande passante est l'ensemble des valeurs des fréquences ou pulsations pour lesquelles le Gain est compris entre sa valeur maximale et une fraction arbitrairement choisie de cette valeur (voir figure 2010.6). En règle générale, on choisit la bande passante à -3dB, qui correspond à une valeur du Gain comprise entre $G_{max}/\sqrt{2}$ et G_{max} . Soit ω_1 la pulsation pour laquelle :

$$G_{max}(\omega_1) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

Soit en remplaçant par la relation obtenue en II.4, cela implique :

$$(RC\omega_1)^2 + \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 = 2 \left(\frac{R}{R_1}\right)^2$$

Soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C}$$

La bande passante $\Delta\omega = [0; \omega_1]$ a donc pour largeur :

$$\Delta\omega = \frac{1}{R_1 C}$$

II.7. Si la tension d'entrée est de pulsation élevée ($\omega > \omega_1$), la tension de sortie tend vers 0 (voir analyse de II.1 et la figure 2010.6). Si la tension d'entrée possède une composante continue, cette dernière sera conservée. Le signal coupe donc les hautes fréquences. Ce faisant, il intègre le signal d'entrée, dans le sens où il en restitue une valeur moyenne temporelle.

C "CHEMINS SUIVIS PAR UN GAZ PARFAIT"

Cet exercice de Thermodynamique est extrêmement classique. Il est l'application directe des cours sur les deux principes de la Thermodynamiques avant d'aborder les machines thermiques. Il s'agit d'étudier l'influence de différentes transformations sur les fonctions thermodynamiques d'un Gaz Parfait entre deux états identiques. Avant de répondre point par point à l'énoncé, il convient de formuler les points communs qui existent entre les trois transformations afin de ne pas refaire plusieurs fois les mêmes calculs et les mêmes explications. Ceci permettra de répondre rapidement et clairement aux questions de l'énoncé. Il conviendra d'être très attentif à ne pas confondre le système noté (S) avec la fonction entropie notée S.

Généralités sur les trois transformations

Le gaz parfait passe de l'état initial noté 1 : P_1, V_1, T_0 à l'état final noté 2 : P_2, V_2, T_0 dans le cas des trois transformations A, B, C, comme indiqué sur la figure 2010.7. Caractérisons d'abord l'état 2. Le Gaz occupe le volume $V_2 = 2V_1$ à la

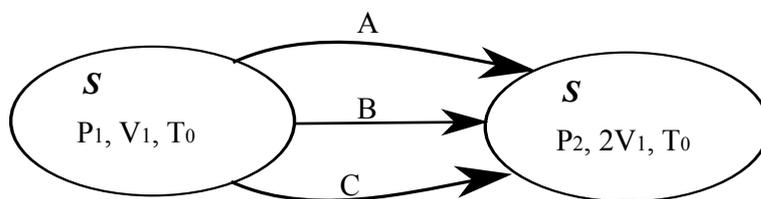


FIG. 2010.7 – Schéma des trois chemins de transformation

température T_0 . La relation des gaz parfaits :

$$P_1 V_1 = nRT_0 = P_2 V_2 = 2P_2 V_1 \implies P_2 = \frac{P_1}{2}$$

Le gaz subit donc une détente qui le fait passer de l'état 1 à l'état 2 selon trois processus différents.

Les fonctions Energie interne et entropie étant des fonctions d'états, les variations de ces fonctions entre les deux états ne dépendent pas du "chemin suivi" donc du processus de transformation. On a donc :

$$\boxed{\Delta U_S = \Delta U_S = \Delta U_S} \tag{2010.1}$$

et

$$\boxed{\Delta S_S = \Delta S_S = \Delta S_S} \tag{2010.2}$$

Pour un gaz parfait fermé, l'énergie interne ne dépend **que de la température**. Puisque celle ci est inchangée entre les deux états 1 et 2, l'énergie interne du système n'a pas variée. Ainsi :

$$\boxed{\Delta U_S = \Delta U_S = \Delta U_S = 0} \tag{2010.3}$$

La variation d'énergie interne est reliée au travail et chaleur échangés :

$$\Delta U_S = 0 = Q_S + W_S$$

On a donc, pour l'ensemble des trois transformations, la relation :

$$\boxed{W_S = -Q_S \text{ pour les trois chemins A, B, C}} \tag{2010.4}$$

Notion de réservoir de température et entropie

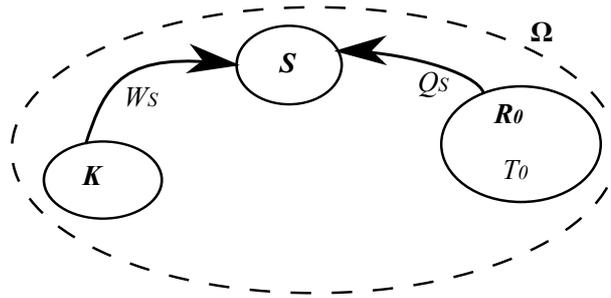


FIG. 2010.8 – Schéma des échanges énergétiques avec les réservoirs

Le système subit une transformation isotherme puisque sa température ne varie pas. On peut donc schématiser les transformations qu'il subit par le schéma de la figure 2010.8. Le système (S) est en relation avec un réservoir de température R_0 à température fixe T_0 . Le système échange avec le réservoir R_0 la chaleur Q_S algébrique comptée positivement quand elle est reçue par le système. Le système (S) échange la quantité algébrique W_S de travail avec le réservoir de travail K. L'ensemble $K+(S)+R_0$ est noté Ω et constitue un système isolé (on parle aussi d'univers). Par définition des échanges algébriques, le réservoir R_0 échange la quantité de chaleur $-Q_S$ avec le système (S).

D'autre part, le second principe stipule, que pour toute transformation élémentaire :

$$dS = s_e + s_i$$

Expression dans laquelle s_e (qui n'est pas une fonction d'état) représente l'entropie échangée et s_i est l'entropie créée en interne par des phénomènes irréversibles

- Si la transformation est irréversible $s_i > 0$ et il n'y a pas d'expression simple pour s_e .
- Si la transformation est réversible $s_i = 0$ et uniquement dans ce cas alors s_e est connue par le rapport de la chaleur échangée à la température du système, qui existe et est définie puisque le système est à l'équilibre durant toute la transformation. On a donc :

$$dS = s_e = \frac{\delta Q}{T} \text{ où } T \text{ est la température du système}$$

Le réservoir R_0 est **toujours à l'équilibre** puisque sa température reste tout le temps la même, quelle que soit la transformation. Ainsi sa variation d'entropie pour les trois transformations est :

$$\Delta S_{th} = \frac{-Q_S}{T_0} = + \frac{W_S}{T_0} \tag{2010.5}$$

Ainsi, les relations (2010.2)(2010.3)(2010.4)(2010.5) nous permettent de ne calculer que la quantité W_S , pour chaque chemin de transformation, pour remplir le tableau demandé.

I. Grandeurs énergétiques

I.1. Le travail élémentaire δW échangé par un gaz parfait pendant une transformation quelconque a pour expression :

$$\delta W = -P_{ext}dV$$

où P_{ext} désigne la pression extérieure qui s'exerce sur le gaz et dV la variation élémentaire de volume.

Transformation A : La pression extérieure est la même que celle du gaz car ce dernier est à l'équilibre tout le long de la transformation, soit

$$P_{ext} = p = \frac{nRT_0}{V} \implies \delta W_S^A = -\frac{nRT_0}{V}dV$$

Soit :

$$W_S^A = - \int_{V_1}^{2V_1} \frac{nRT_0}{V}dV = -nRT_0 \ln \left[\frac{2V_1}{V_1} \right] = -nRT_0 \ln 2$$

La relation (2010.4) amène donc :

$$Q_S^A = -W_S^A = +nRT_0 \ln 2$$

Puisque la transformation est isotherme et réversible :

$$\Delta S_S = \frac{Q_S}{T_0} = +nR \ln 2$$

La relation (2010.2) nous assure que cette variation d'entropie est la même pour les trois chemins de transformations. La relation (2010.5) amène alors :

$$\Delta S_{th} = -nR \ln 2$$

Transformation B : La pression extérieure est constante durant la transformation et vaut la pression finale $P_2 = P_1/2$. Le travail élémentaire est donc :

$$\delta W_S^B = -P_2 dV = -\frac{P_1}{2} dV$$

D'où :

$$W_S^B = -\int_{V_1}^{2V_1} \frac{P_1}{2} dV = -\frac{P_1}{2} V_1 = -\frac{nRT_0}{2}$$

et

$$Q_S^B = -W_S^B = \frac{nRT_0}{2}$$

et donc :

$$\Delta S_{th} = -\frac{nRT_0}{2}$$

Transformation C : La pression extérieure est constante et **nulle** durant la transformation. D'où

$$\delta W_S^C = -P_{ext} dV = 0$$

$$W_S^C = 0$$

et

$$Q_S^C = 0$$

alors :

$$\Delta S_{th} = 0$$

I.2. Pour $n = 1$, on obtient donc les quantités molaires demandées par l'énoncé.

Transformation	W_S	Q_S	ΔU_S	ΔS_S	ΔS_{th}
A	$-RT_0 \ln 2$	$+RT_0 \ln 2$	0	$R \ln 2$	$-R \ln 2$
B	$-\frac{RT_0}{2}$	$+\frac{RT_0}{2}$	0	$R \ln 2$	$-\frac{R}{2}$
C	0	0	0	$R \ln 2$	0

II. Conclusion et mise en œuvre expérimentale

II.1. Les conclusions à tirer de ces expériences sont nombreuses. On peut les présenter sous la forme d'une analyse énergétique d'un côté, et d'une analyse entropique de l'autre. D'un point de vue historique, l'expérience C est l'expérience qui a permis de montrer que l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température, il s'agit de l'expérience de Joule Gay-Lussac. En effet, lors d'une détente dans le vide, isotherme, aucun travail n'est échangé par le gaz. Expérimentalement, on a pu montrer qu'aucune chaleur n'était échangée. Donc l'énergie interne n'a pas varié. Actuellement, on re-visite cette expérience dans un autre sens (on suppose que l'énergie interne ne varie pas et l'on montre que le gaz n'échange pas de chaleur). L'ensemble des expériences A, B, C met bien en évidence que si l'énergie interne est une fonction d'état dont la variation ne dépend que des états finaux et initiaux, les quantités Q et W n'ont aucune propriété particulière de ce type.

En ce qui concerne l'entropie, il est possible de calculer la quantité d'entropie échangée par le système du gaz pour chaque

transformation et la variation d'entropie de l'Univers Ω . Pour cela, il faut utiliser la propriété d'extensivité de l'entropie, quel que soit le chemin suivi pour la transformation :

$$\Delta S_{\Omega} = \Delta S_S + \Delta S_{R_0} = S_e(S) + S_i(S) + S_e(R_0)$$

En effet, le réservoir étant toujours à l'équilibre, il ne subit pas de transformation irréversible et donc : $S_i(R_0) = 0$.

D'autre part, le système n'échangeant de l'entropie qu'avec R_0 , il vient par convention de signe :

$$S_e(S) = -\Delta S_t h = +\frac{Q_S}{T_0}$$

On a donc :

$$\Delta S_{\Omega} = S_i(S)$$

D'autre part,

$$\Delta S_S = S_e(S) + S_i(S)$$

D'où

$$S_i(S) = \Delta S_S - S_e(S) = \Delta S_S + \Delta S_t h$$

Pour A :

$$S_i(S) = \Delta S_S + \Delta S_t h = R \ln 2 - R \ln 2 = 0$$

Pour B :

$$S_i(S) = \Delta S_S + \Delta S_t h = R \ln 2 - \frac{R}{2} \sim R(0,693 - 0,5) \sim 0,193R > 0$$

Pour C :

$$S_i(S) = \Delta S_S + \Delta S_t h = R \ln 2 - 0 \sim 0,693R > 0$$

Pour les deux transformations irréversibles, on trouve bien une création d'entropie positive et une variation d'entropie de l'univers positive. Qualitativement, la transformation C peut être qualifiée de "plus" irréversible que la transformation B puisque la quantité S_i est plus grande. Cette quantité est un marqueur de l'éloignement de la transformation réellement suivi d'un chemin qui serait réversible. **II.2.** Un procédé expérimental permettant de réaliser la transformation C peut être proposé grâce à une enceinte en verre. Cette dernière laisse passer la chaleur. Elle assure donc la thermalisation du dispositif. Cette enceinte est séparée en deux volume identique par une membrane cassable et étanche (en verre elle aussi). D'un côté il y a le gaz, de l'autre le vide. Un dispositif pyrotechnique par exemple piloté de l'extérieur, ou un système d'ultrason, permet de casser, à un instant choisi par l'opérateur, la membrane de séparation. Le gaz se détend alors dans le vide. C'est l'expérience de Joule Gay Lussac.

— FIN —

Epreuve de 2011

A UTILISATION D'UN VISEUR

I. Caractéristiques du viseur

I.1. Afin que l'œil n'accomode pas pour observer l'image R_2 du réticule par la lentille L_2 , il faut que R_2 soit à l'infini. Il faut donc que R soit dans le plan focal objet de L_2 . On doit donc avoir :

$$\overline{RO_2} = \overline{F_2O_2} = +f'_2$$

Application numérique :

$$\overline{RO_2} = 3 \text{ cm}$$

I.2. Par définition le plan focal objet d'un système optique est le plan situé dans l'espace objet réel qui est conjugué avec l'infini de l'espace image réelle. Le foyer objet F est l'intersection de ce plan avec l'axe optique. **L'ensemble des rayons lumineux passants par ce point ressortent donc du système optique parallèlement à l'axe optique.** Ceci est schématisé sur la figure 2011.1 **I.3.**

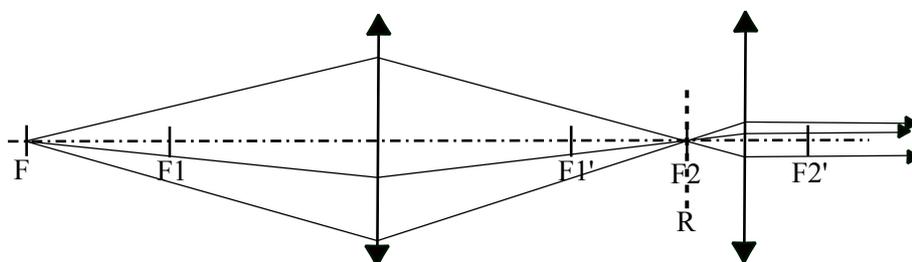


FIG. 2011.1 – Schéma des rayons passant par F

I.4. Le point F a pour image le point G par L_1 . Le point G a une image rejetée à l'infini par L_2 . Le point G se situe donc au point foyer objet de L_2 , soit :

$$G = F_2$$

Utilisant la relation de conjugaison de Newton (au foyer) de la lentille L_1 pour le couple de points F et G , il vient donc :

$$\overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1G} = \overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1F_2} = -f_1'^2$$

soit

$$\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F'_1F_2}}$$

Or

$$\overline{F'_1F_2} = d_1 + d_2 - d_2 - f'_1 = d_1 - f'_1$$

d'où

$$\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{d_1 - f'_1}$$

Application numérique :

$$\overline{F_1F} = -\frac{8^2}{15-8} \sim -9,1 \text{ cm}$$

II. Utilisation du viseur

II.1.

II.1. 1. Un plan de front est un plan perpendiculaire à l'axe optique. Pour que l'œil puisse viser sans accommoder, simultanément le réticule et l'objet visé, il faut que l'image du réticule (question I.1) et de l'objet visé soit toutes les deux à l'infini. Il faut donc que l'objet soit situé dans le plan focal objet du viseur. Ce plan est le plan orthogonal à l'axe optique et le coupant en F , comme indiqué sur les figures 2011.1, et 2011.2

II.1. 2. Le point B a une image B' par $L1$. Cette image B' , située dans le plan focal objet de $L2$ a donc une image à l'infini par $L2$, comme schématisé sur la figure 2011.2. Pour construire B' , on utilise

1. le fait que le rayon BO_1 n'est pas dévié (rayon 0 sur la figure 2011.2).
2. le fait que le rayon passant par B et parallèle à l'axe optique ressort de $L1$ en passant par F_1' (rayon 1 sur la figure 2011.2).
3. le point B' est à l'intersection de ces deux rayons.

Pour construire l'image de B' par $L2$, on utilise :

1. le fait que le rayon $B'O_2$ n'est pas dévié (rayon 2 sur la figure 2011.2).
2. le fait que le rayon passant par B' et parallèle à l'axe optique ressort de $L2$ en passant par F_2' (rayon 3 sur la figure 2011.2).
3. Ces deux rayons sont parallèles, l'image est à l'infini.

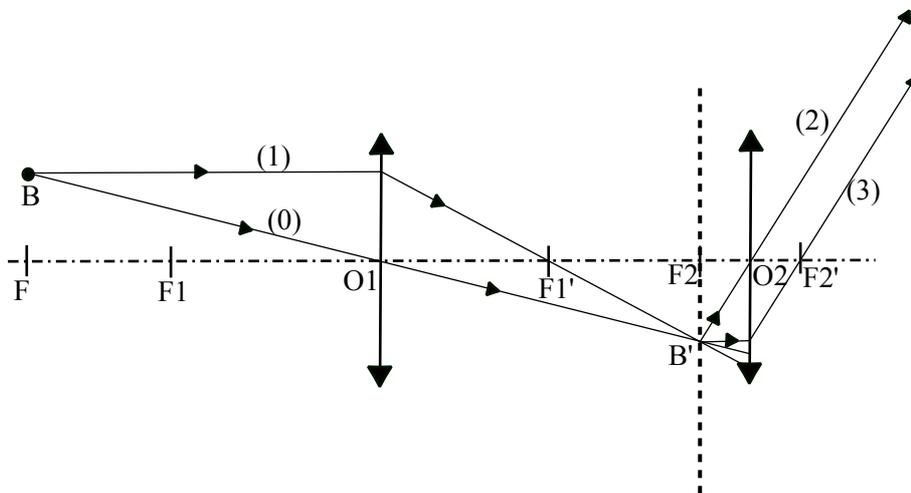


FIG. 2011.2 – Schéma de la construction de l'image d'un point B du plan de front du viseur

II.2.

II.2. 1. Puisque le viseur permet de vider un point fixe à distance finie, la distance x_1 de laquelle il faut reculer le viseur entre la première et la deuxième étape est la distance qui sépare les deux points visés durant ces étapes. Donc

$$\overline{AO_3} = x_1$$

Remarque : Attention à la convention algébrique de distance. x_1 est une distance (donc positive), $\overline{O_3A}$ est orientée dans le sens de la lumière.

On applique le même raisonnement pour le passage de l'étape 2 à l'étape 3. La distance x_2 est donc la distance qui sépare

O_3 de A' . D'après l'énoncé et le schéma, entre l'étape 2 et l'étape 3, le viseur est **rapproché** de la lentille pour viser A' . On en déduit donc que $\overline{O_3A'} < 0$. Donc :

$$\overline{A'O_3} = x_2$$

On a donc :

$$\boxed{\overline{O_3A} = -x_1 \text{ et } \overline{O_3A'} = -x_2}$$

Application numérique :

$$\boxed{\overline{O_3A} = -15 \text{ cm et } \overline{O_3A'} = -10 \text{ cm}}$$

II.2. 2. Par la relation de conjugaison au centre de la lentille L_3 , il vient donc :

$$\frac{1}{\overline{O_3A'}} - \frac{1}{\overline{O_3A}} = \frac{1}{f'_3}$$

Soit :

$$\boxed{f'_3 = \frac{1}{\frac{1}{\overline{O_3A'}}} - \frac{1}{\overline{O_3A}}}$$

Application numérique :

$$\boxed{f'_3 = \frac{1}{\frac{1}{-10} - \frac{1}{-15}} = -30 \text{ cm}}$$

L_3 est donc une lentille divergente.

II.2. 3. D'après le calcul de la focale de la lentille L_3 , il apparaît selon les données de l'énoncé que le point A se situe entre F_3' et O_3 . Pour construire l'image du point B par L_3 , on utilise les mêmes règles que pour les figures 2011.1 et 2011.2 : le rayon passant par le centre n'est pas dévié (rayon 0 sur la figure 2011.3) et le rayon incident parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par le foyer image image (rayon 1 sur la figure 2011.3).

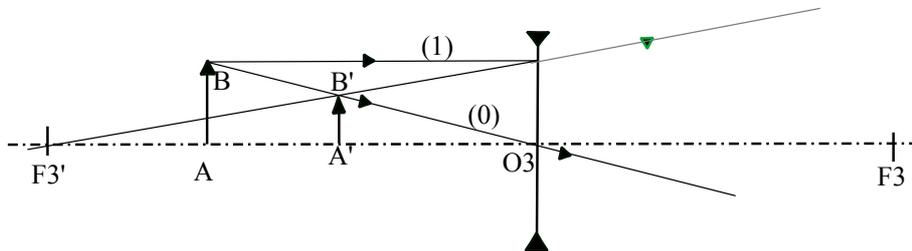


FIG. 2011.3 – Schéma de la construction de l'image $A'B'$ de AB par la lentille L_3

B MESURE D'UNE CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

I. Généralités

Ce problème entend proposer une solution expérimentale de mesure de la conductivité d'un matériau, supposé homogène, isotrope et uniforme. **I.1.** Le vecteur de densité de flux de chaleur \vec{j}_{th} est la quantité de chaleur par unité de surface et par unité de temps soit en terme de dimension :

$$[\vec{j}_{th}] = \frac{[Energie]}{[Surface \cdot Temps]}$$

et d'après la loi de Fourier :

$$[\lambda] = \frac{[distance] [\vec{j}_{th}]}{[Température]}$$

En unités du système international, il vient donc :

$$\vec{j}_{th} \rightarrow W.m^{-2} \text{ et } \lambda \rightarrow W.m^{-1}.K^{-1}$$

I.2. Considérons une surface quelconque, **non fermée**, de vecteur local infinitésimal $d\vec{S}$ (vecteur normal localement à la surface et de norme dS), alors par définition de \vec{j}_{th} , la relation entre le flux et le vecteur densité de flux est :

$$\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

Dans le cadre monodimensionnel du problème posé, S est un disque de rayon r perpendiculaire à l'axe z et \vec{j}_{th} est orienté selon l'axe z , ne dépendant que de z (il est donc constant sur la surface S). On a donc :

$$d\vec{S} = \pi r^2 \cdot \vec{e}_z \text{ et } \vec{j}_{th} = j_{th}(z) \vec{e}_z$$

Donc ici, il vient :

$$\Phi_{th}(z) = \pi r^2 \cdot j_{th}(z)$$

I.3. La puissance électrique dissipée dans un dipole est donnée par le produit tension-courant, soit :

$$P_{el} = E \cdot I$$

Dans le cas où le dipole est une résistance R_{el} , suivant la loi d'Ohm, il vient :

$$P_{el} = \frac{E^2}{R_{el}}$$

I.4. Si toute la puissance dissipée est fournie au barreau, le flux de chaleur à la côte $z = 0$ est donc égal à la puissance électrique, soit :

$$P_{el} = \Phi_{th}(z = 0)$$

D'après les questions II.2 et II.3, il vient donc

$$j_{th}(z = 0) = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el}}$$

I.5. Pour plus de simplicité nous utiliserons la loi locale de conservation de l'énergie. Si l'on considère le barreau comme un matériau de volume constant, on utilise alors son énergie interne U . On définit la densité interne d'énergie u :

$$U = \iiint_V u d\tau$$

où V désigne le volume du matériau et $d\tau$ son élément infinitésimal local.

Le premier principe amène alors à l'équation locale de la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_{th}) = 0$$

En régime stationnaire permanent, les quantités ne dépendent pas explicitement du temps, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Et dans le cadre monodimensionnel :

$$\text{div}(\vec{j}_{th}) = \frac{dj_{th}}{dz}$$

Soit donc :

$$\frac{dj_{th}}{dz} = 0$$

Le vecteur \vec{j}_{th} est donc uniforme et d'après la question II.4 :

$$j_{th}(z) = j_{th}(z=0) = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el}}$$

La loi de Fourier, projetée, sur \vec{e}_z donne alors :

$$-\lambda \frac{dT}{dz} = j_{th}(z) = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el}}$$

En intégrant selon z , il vient donc :

$$T(z) = -\frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} z + \alpha_0 \text{ avec } \alpha_0 \text{ une constante d'intégration fixée par les conditions aux bords.}$$

I.6. Il vient donc d'après la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el}} \vec{e}_z \text{ et } \text{grad}(T) = -\frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} \vec{e}_z$$

Il peut être judicieux d'aller un peu plus loin que ne le demande l'énoncé et d'exprimer complètement la température en fonction des données de l'expérience. La constante α_0 est fixée par les conditions aux bords du cylindre :

$$T(z \sim L) = T_L = -\frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} L + \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = T_L + \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} L$$

D'où

$$T(z) = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} (L - z) + T_L$$

Cette écriture amène donc à une relation qui doit exister entre T_0 et T_L puisqu'en $z = 0$, on doit donc avoir :

$$T_0 = \frac{E^2}{\pi r^2 \cdot R_{el} \lambda} L + T_L$$

II. Mesure de la conductivité thermique

II.1.

II.1. 1. Puisque la température est une fonction affine, il vient donc :

$$\text{grad}(T) = \frac{dT}{dz} \vec{e}_z = \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} \vec{e}_z$$

II.1. 2. L'allure de la variation de la température le long du barreau est représentée sur la figure 2011.4. **II.2. II.2. 1.**

D'après la question I.5, on a la relation :

$$\lambda = -\frac{j_{th}}{\frac{dT}{dz}}$$

En substituant par les expressions trouvées en I.5 et II.1.a, il vient donc :

$$\lambda = -\frac{E^2(z_2 - z_1)}{\pi r^2 \cdot R_{el}(T_2 - T_1)}$$

Numériquement :

$$\lambda = -\frac{6,0^2(0,2 - 0,1)}{\pi(10^{-2})^2 \times 10(320 - 330)} \sim 114,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

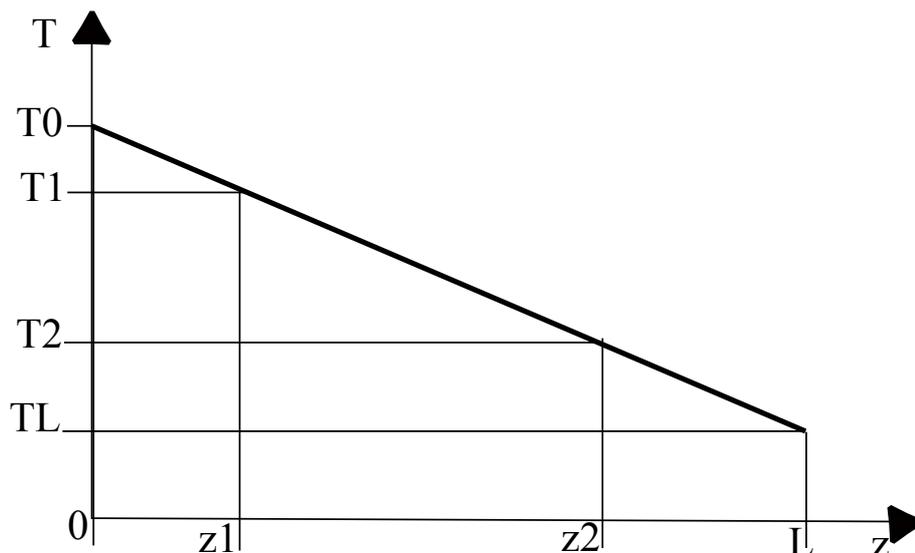


FIG. 2011.4 – Schéma de la courbe représentative de la température le long du barreau

II.2. 2. D'après la question I.5 (T est une fonction affine), il vient donc :

$$T(z) = \frac{T_1 - T_2}{z_1 - z_2}z + T_0$$

Donc, en particulier en $z = z_1$

$$T_1 = \frac{T_1 - T_2}{z_1 - z_2}z_1 + T_0$$

d'où

$$T_0 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{z_1 - z_2}z_1$$

Soit numériquement :

$$T_0 = 330 - \frac{330 - 320}{0,1 - 0,2}0,1 = 340 \text{ K}$$

En $z = L$, on a la relation :

$$T_L = \frac{T_1 - T_2}{z_1 - z_2}L + T_0$$

Numériquement :

$$T_L = \frac{330 - 320}{0,1 - 0,2}0,4 + 340 = 300 \text{ K}$$

II.2. 3. EN $z = L$, le serpentin d'eau absorbe toute l'énergie "sortant" du cylindre, puisque la température de ce dernier est constante. Donc la puissance P_{eau} évacuée par l'eau est :

$$P_{eau} = \Phi_{th} = \frac{E^2}{R_{el}}$$

Numériquement :

$$P_{eau} = \Phi_{th} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ W}$$

II.2. 4.

$$R_{th} = \frac{T_0 - T_L}{\Phi_{th}}$$

Numériquement :

$$R_{th} = \frac{340 - 300}{3,6} \sim 11,1 \text{ K. W}^{-1}$$

$$r_{th} = \frac{R_{th}}{L} = \frac{T_0 - T_L}{L\Phi_{th}}$$

Numériquement :

$$r_{th} = \frac{340 - 300}{3,6 \times 0,4} \sim 27,8 \text{ K. W}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

C DÉTENTE ISOTHERME D'UN MÉLANGE DE DEUX CORPS PURS.

I. Corps pur eau (sans diazote)

I.1. Le corps pur eau (seul) est dans un état de vapeur saturante placé exactement au point de rosée. Par définition de la pression de vapeur saturante, la pression du système composé de l'eau sous forme gazeuse est la pression de vapeur saturante, soit :

$$P_{E,0} = P^*(H_2O; T_0 = 333 \text{ K})$$

I.2. La vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait. Ce système obéit donc à la loi de Boyle-Mariotte :

$$P_{E,0}V_0 = n_E RT_0$$

Donc :

$$V_0 = \frac{n_E RT_0}{P^*(H_2O; T_0 = 333 \text{ K})}$$

Application numérique :

$$V_0 = \frac{0,3 \times 8,31 \times 333}{2.10^4} \sim 41,5.10^{-3} \text{ m}^3 \sim 41,5 \text{ litres}$$

I.3. Les deux schémas sont complétés sur la figure 2011.5.

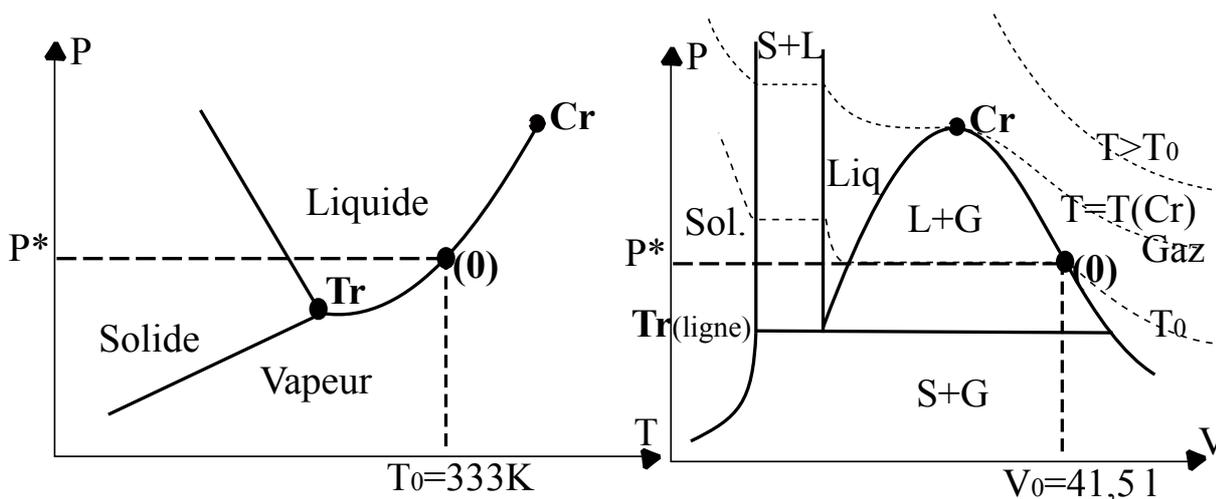


FIG. 2011.5 – Diagramme de Clapeyron (à gauche) de coexistences des trois phases pour l'eau pure, diagramme d'Amagat (à droite). Sur le diagramme de gauche le point critique est nommé C_r ; point au delà duquel les phases liquide et gazeuse sont indiscernables. Le point Triple T_r est le point de coexistence des trois phases. Sur le diagramme de droite, en pointillés sont représentées les trajectoires dans le diagramme (P, V) de transformations isothermes pour différentes températures.

Le point d'état 0 (0) est un point sur le diagramme P, T d'abscisse T_0 et d'ordonnée $P^*(H_2O; 333 \text{ K})$. Comme il est spécifié que l'état (0) correspond à la vapeur tout juste saturante, il se situe donc dans le diagramme de droite de rosée (coexistence liquide-vapeur) à l'abscisse V_0 , calculée à la question précédente et à la pression $P^*(H_2O; 333 \text{ K})$.

I.4. Si l'on réduit le volume de façon isotherme et réversible, la trajectoire dans le diagramme d'Amagat suit l'isotherme T_0 , comme représenté sur la figure 2011.6.

L'état après transformation est donc un état de coexistence gaz-liquide à $T = T_0$ et $P = P^*(H_2O, T_0)$. Soient n_v , le nombre de moles d'eau sous forme vapeur et n_L celui d'eau sous forme liquide, la conservation de la matière implique :

$$n_E = n_v + n_L$$

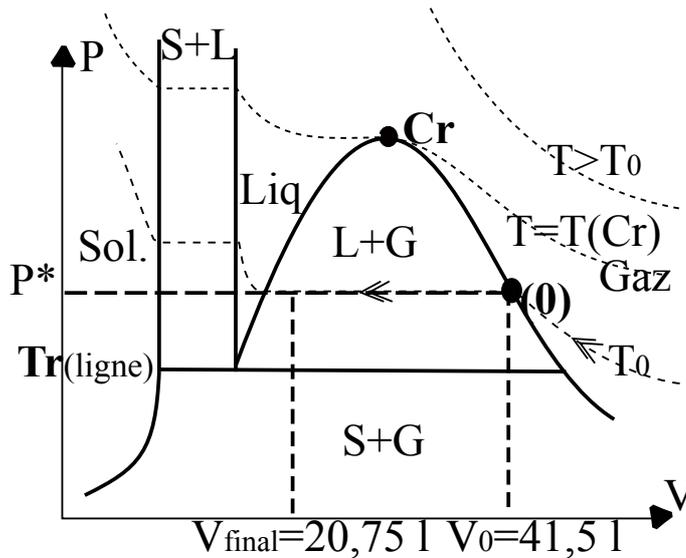


FIG. 2011.6 – Diagramme d'Amagat pour la transformation isotherme

D'après la loi de Boyle Mariotte et le fait que l'on néglige le volume de liquide devant celui du gaz, il vient :

$$n_v = \frac{P^*(H_2O, T_0)V_{final}}{RT_0} = \frac{P^*(H_2O, T_0)V_0}{2RT_0} = \frac{n_E}{2}.$$

La transformation a donc consisté en la liquéfaction de la moitié de l'eau, soit $n_E/2$ moles.

D'autre part, le travail élémentaire, δW , qu'échange un fluide lors d'une transformation infinitésimale est :

$$\delta W = -P_{ext}dV$$

où P_{ext} désigne la pression extérieure, et dV la variation de volume qu'il subit.

Ici l'intégralité du fluide est à la pression $P^*(T_0)$ (voir la figure 2011.6). Durant la liquéfaction de la moitié de la vapeur d'eau le travail W est donc (en négligeant le volume de liquide devant celui de la vapeur) :

$$W = - \int_{V_0}^{V_0/2} P^*(T_0)dV = -P^*(T_0) \left[\frac{V_0}{2} - V_0 \right] = P^*(T_0) \frac{V_0}{2}$$

Application numérique :

$$W \sim 2.10^4 \times \frac{41,5.10^{-3}}{2} \sim 415 \text{ J}$$

II. Transformation d'un mélange diazote-eau

II.1. Remarque du correcteur : L'énoncé ici est imprécis quant à l'état de l'eau. En effet, il est indiqué : "A la quantité $n_E...$ d'eau précédente...", on ne sait pas s'il s'agit de l'état 0 du paragraphe I, où de l'état final de la question I.4. La question II.1.a laisse supposer que l'on part d'un état d'eau complètement sous forme gazeuse. D'autre part le deuxième point des hypothèses laisse supposer aussi que l'on part de l'état 0. Cependant la toute dernière question de l'énoncé II.3 laisse penser que la transformation consiste à prendre le mélange liquide-vapeur + azote et le détendre jusqu'à ce que la vapeur devienne sèche. La correction suppose ici que nous partons de l'état du système eau-pure du I.4

II.1. 1. L'état final de la question I.4 est un mélange vapeur liquide d'eau pure avec :

$$n_v = n_L = n_E/2; \quad P = P^*(T_0); \quad V = V_0/2;$$

Pour obtenir l'état 1, on ajoute à ce système du di-azote gazeux, de telle façon que la pression soit fixée, mais on laisse le volume libre d'évoluer jusqu'à V_1 . Le point 3 des hypothèses : "le comportement de corps pur manifesté par l'eau est

indépendant de la présence du di-azote", amène forcément à considérer que l'équilibre fondamental liquide-vapeur n'est pas modifié profondément. Donc l'eau se retrouve dans une situation de vapeur saturante pas dans un état pas très éloigné de l'état de la question I.4.

II.1. 2. Alors la pression partielle d'eau est la pression de vapeur saturant $P^*(H_2O, T_0)$:

$$P_{tot,1} = p_{N,1} + P_{H_2O,1} = p_{N,1} + P^*(H_2O, T_0) \text{ soit } p_{N,1} = P_{tot,1} - P^*(H_2O, T_0)$$

$$p_{N,1} = P_{tot,1} - P^*(H_2O, T_0) = (3,00 - 2,00) \cdot 10^4 = 1,00 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

II.1. 3. La loi des gaz parfaits sur le diazote amène

$$p_{N,1} V_1 = n_N R T_0$$

soit :

$$V_1 = \frac{n_N R T_0}{p_{N,1}} = \frac{10^{-1} \times 8,31 \times 333}{10^4} \sim 27,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

II.1. 4. La conservation de la matière implique que :

$$n_E = n_{E,vap,1} + n_{E,liq,1}$$

La loi des gaz parfaits sur l'eau vapeur amène à :

$$n_{E,vap,1} = \frac{p_{H_2O,1} V_1}{R T_0} = \frac{2 \cdot 10^4 \times 27,7 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 333} \sim 0,2 \text{ mol}$$

et donc

$$n_{E,liq,1} = n_E - n_{E,vap,1} \sim 0,3 - 0,2 \sim 0,1 \text{ mol}$$

II.2. La pression est abaissée jusqu'à ce que la pression totale soit égale à $P^*(H_2O, T_0)$.

II.2. 1.

$$P_{tot,2} = p_{N,2} + p_{H_2O,2}$$

Donc :

$$p_{H_2O,2} = P_{tot,2} - p_{N,2}$$

Or numériquement , $P_{tot,2} = P^*(H_2O, T_0)$. Donc :

$$p_{H_2O,2} < P^*(H_2O, T_0) \text{ (Inégalité à prendre au sens strict)}$$

Dans le diagramme de Clapeyron représenté sur la figure 2011.7, on voit alors que le point représentatif de l'état (2) est situé dans la zone d'existence exclusive de la vapeur. Il n'y a pas de liquide.

La vapeur est donc sèche

II.2. 2. On a

$$P_{tot,2} = p_{H_2O,2} + p_{N,2}$$

Or, puisque toute l'eau est sous forme gazeuse :

$$p_{H_2O,2} V_2 = n_E R T_0 \text{ mais aussi } p_{N,2} V_2 = n_N R T_0$$

Soit :

$$P_{tot,2} V_2 = (n_E + n_N) R T_0$$

On a donc le rapport :

$$\frac{p_{N,2}}{P_{tot,2}} = \frac{n_N}{(n_E + n_N)}$$

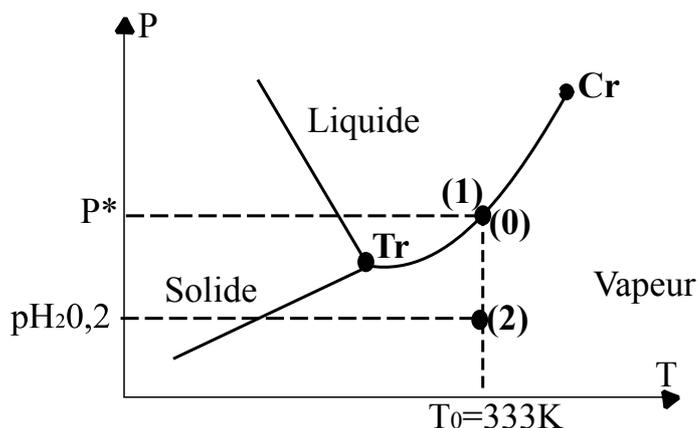


FIG. 2011.7 – Diagramme de Clapeyron pour la détente isotherme réversible

d'où :

$$p_{N,2} = P_{tot,2} \frac{n_N}{(n_E + n_N)} = 2.10^4 \times \frac{10^{-1}}{(10^{-1} + 3.10^{-1})} = 5,00.10^3 \text{ Pa}$$

II.2. 3. La loi des gaz parfait sur le mélange gazeux eau-diazote :

$$V_2 = \frac{(n_E + n_N)RT_0}{P_{tot,2}} = \frac{4.10^{-1} \times 8,31 \times 333}{2.10^4} \sim 55,3.10^{-3} \text{ m}^3$$

II.2. 4. Remarque : Très étrange question ici puisque pour traiter les questions 2a,2b,2c, il faut avoir déjà répondu à la question

D'après II.2.a,

$$n_{E,vap,2} = n_E = 3,00.10^{-1} \text{ mol et } n_{E,liq,2} = 0 \text{ mol}$$

II.3. A la limite de la vapeur saturante, le système est dans l'état suivant :

- L'eau est entièrement gazeuse : $n_{E,liq} = n_E = 0,3 \text{ mol}$
- La pression partielle d'eau est la pression de vapeur saturante : $p_{H_2O} = P^* = 2.10^4 \text{ Pa}$
- Il occupe le volume V_S

La loi des gaz parfait sur la vapeur d'eau donne :

$$V_S = \frac{n_E RT_0}{P^*(H_2O, T_0)} = V_0 \sim 41,5.10^{-3} \text{ m}^3$$

On retrouve le résultat des questions I.1, I.2, I.3, I.4.

— FIN —