

**PARTIE A: ETABLISSEMENT DE L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT DANS QUELQUES CAS
CANONIQUES**

Dans cette partie, nous allons retrouver l'équation de D'ALEMBERT dans un certains nombre de cas académiques, corde de Melde, ondes sonores dans les fluides, équation du télégraphiste. Dans cette partie, on ne considère pas les conditions aux limites des dispositifs étudiés.

I. Corde de Melde

Une corde, dite corde de Melde, horizontale est attachée d'une part à un bâti fixe et d'autre part à une poulie qui permet d'assurer la mise sous tension de la corde, comme représenté sur la figure 1. La tension \vec{F}_0 est constante et assure que la corde reste en permanence proche de l'état d'équilibre : les mouvements de la corde sont de faible amplitude et la laisse autour de sa position quand elle n'a aucun mouvement. Ainsi dans l'expression du principe fondamental de la dynamique, on considèrera des "sur" ou "sous" tensions par rapport à la position d'équilibre. Cette hypothèse est souvent traduite improprement, dans les énoncés, par le la phrase "on négligera la force de pesanteur". La corde est inextensible et possède une masse linéique

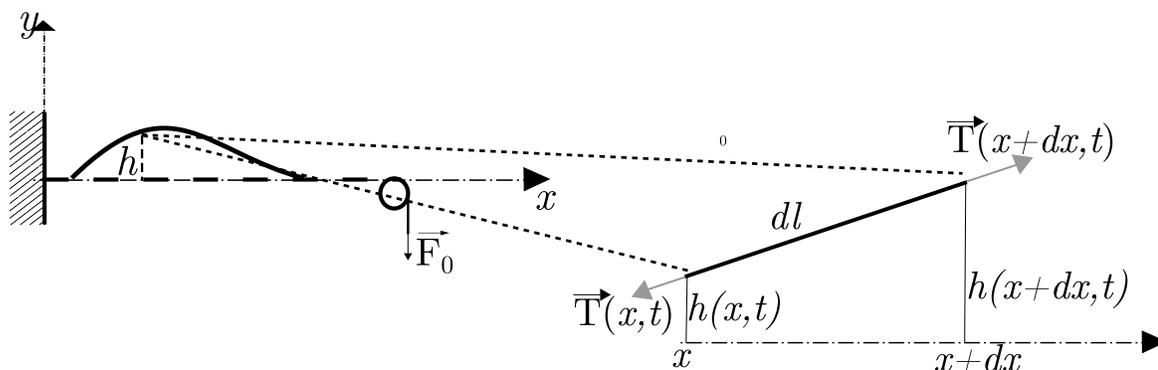


FIGURE 1 – Corde horizontale maintenue proche de sa position d'équilibre par la tension. En traits pointillés, la corde à l'équilibre, en traits pleins, la corde déplacée localement et verticalement. A droite un zoom sur un élément infinitésimal de la corde de longueur dx au repos

notée traditionnellement μ . Elle peut être déplacée par rapport à sa position d'équilibre de façon transverse dans le plan (x, y) . Un point de la corde est localisé par son abscisse x et sa côte $h(x, t)$ comme représenté

sur la figure 1. Enfin, la pente de la corde reste toujours faible. On va travailler sur un élément infinitésimal de la corde de longueur au repos dx .

I.1. Mise en équation des hypothèses.

I.1. 1. Exprimer ds la longueur de l'élément infinitésimal de la corde en fonction de dx et de la dérivée partielle $\frac{\partial h}{\partial x}$. Traduire alors l'inextensibilité de la corde.

I.1. 2. En faisant un bilan des forces, projeté sur l'axe des abscisses, montrer que la composant T_x est constante. La tension de la corde est toujours tangente à celle ci, en déduire la relation entre le rapport des composantes de la tension locale $\frac{T_y}{T_x}$ et la dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}$. En déduire alors la relation entre la composante T_y , $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $F_0 = \|\vec{\mathbf{F}}_0\|$.

I.2. Principe fondamental de la dynamique

I.2. 1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'élément infinitésimal de la corde, projeté sur l'axe y .

I.2. 2. En déduire l'équation de D'ALEMBERT que vérifie $h(x, t)$.

I.2. 3. Pour une corde donnée, comment modifier la vitesse de phase c ?

I.2. 4. Quelle autre quantité que h vérifie l'équation de D'ALEMBERT (on peut parler de quantité adjointe)?

I.2. 5. L'onde décrite est elle transverse ou longitudinale?

I.3. Analyse dimensionnelle : autre façon de voir

On suppose maintenant que l'on SAIT que h vérifie une équation de D'ALEMBERT, on se pose la question de déterminer quelle est la vitesse c en fonction des hypothèses de la configuration.

I.3. 1. De quelles quantités c peut il dépendre?

I.3. 2. On suppose une loi de puissance entre c , F_0 et μ .

I.3. 3. Par analyse dimensionnelle, trouver cette loi de puissance.

I.3. 4. Donner une anecdote historique sur cette façon de faire de la physique.

II. Ondes sonores dans un fluide

De façon générale, la dynamique d'un fluide est décrite par les équations de Navier-Stokes, et pour un fluide parfait par l'équation dite d'Euler. Ces équations ne sont pas indispensables pour dériver l'équation de D'ALEMBERT, elle peut s'obtenir à partir de bilan sur une tranche infinitésimale de fluide, en faisant quelques hypothèses. Il est important ici de noter que le fluide peut-être un liquide ou un gaz.

On suppose que le fluide est le siège de **petites variations** locales de vitesse et de pression, autour de son état d'équilibre. Ce dernier est caractérisé par une pression constante, notée P_0 , par une masse volumique Π_0

constante et uniforme et par l'absence de mouvement au sein du fluide (vitesse locale nulle). On se place en fait dans le référentiel où le fluide est globalement au repos. On supposera la configuration mono-dimensionnelle, c'est à dire que les quantités physiques ne varient spatialement que selon l'abscisse x . La composante selon x de la vitesse locale du fluide sera notée $v(x, t)$, la variation locale de pression sera notée $p(x, t)$ et la variation de masse volumique $\rho(x, t)$. Il est important de remarquer que ces quantités sont algébriques : elles peuvent être positives ou négatives. En particulier une variation $p < 0$ signifiera que la pression locale du fluide est plus petite que P_0 mais reste quand même positive, il en est de même pour ρ . On écrira donc pour la pression locale $P(x, t)$ et la masse volumique locale $\Pi(x, t)$:

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t) \text{ et } \Pi(x, t) = \Pi_0 + \rho(x, t)$$

Enfin, comme l'on considère des petites variations autour de la position d'équilibre, cela revient à considérer que l'influence de la force de gravité n'intervient que dans les quantités P_0 et Π_0 . Ceci amène à nouveau à dire **improprement** que l'on néglige les forces de gravité. Cette hypothèse est réaliste pour les fluides légers (les gaz) et pour les liquides pourvu que l'on n'étudie pas la propagation des ondes sur des grandes profondeurs.

II.1. Généralités

II.1. 1. Rappeler proprement la définition d'une pression, à l'aide d'un schéma.

II.1. 2. De façon générale, il existe une relation, appelé équation d'état du fluide, reliant la masse volumique Π à sa pression P . On appelle coefficient de compressibilité la quantité χ définie par le rapport relatif des variations de Π et P lors d'une transformation. Ce coefficient peut être isochore (volume constant), isotherme (température constante), ou isentropique (entropie constante, le système élémentaire étudié n'échange pas de chaleur avec l'extérieur). Il est noté alors :

$$\chi_\alpha = \frac{1}{\Pi} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial P} \right)_\alpha \text{ où } \alpha \text{ désigne la quantité restée constante : } V, T \text{ ou } S$$

1. Application : exprimer χ_S et χ_T pour un gaz parfait en fonction de la température et de la pression.

En donner une estimation numérique.

2. Pour l'eau, la différence entre χ_T et χ_S vous semble -t-elle importante? Pourquoi?

3. De façon générale, on ne connaît pas fonction d'état (penser à l'eau par exemple). A l'aide des hypothèses sur le fluide relier $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ à $\frac{\partial p}{\partial t}$

II.2. Conservation de la masse

En considérant une tranche infinitésimale de fluide, selon la direction x , de longueur dx , et de surface latérale S_0 dans le plan y, z , trouver l'équation qui relie $\frac{\partial v}{\partial x}$ à $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. On pourra faire un bilan détaillé sur le volume

élémentaire $S_0 dx$ ou utiliser la relation générale de loi de conservation. Dans tous les cas, on linéarise les équations au variations de premier ordre.

II.3. Principe fondamental de la dynamique

Appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le système $S_0 dx$, trouver la relation entre $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial x}$. On pensera à négliger tous les termes qui ne sont pas au bon ordre de grandeur.

II.4. Equation d'évolution de v et p

II.4. 1. En utilisant les relations obtenues aux deux dernières questions, trouver l'équation de D'ALEMBERT que vérifient v et p . A quoi est homogène le produit $p.v$? L'onde est elle transverse ou longitudinale?

II.4. 2. Retrouver l'expression de la célérité c par analyse dimensionnelle.

II.4. 3. Application numérique : quelle est la vitesse du son dans l'air atmosphérique (on pourra faire les 2 applications avec χ_T et χ_S).

II.5. Généralisation tridimensionnelle

II.5. 1. Comment s'écrivent les équations obtenues en II.2 et II.3 en trois dimensions (on pourra utiliser l'opérateur $\vec{\nabla}$)

II.5. 2. Calculer le rotationnel de la vitesse \vec{v} .

II.5. 3. Les ondes transverses sont elles possibles dans un fluide?

III. Equation du télégraphiste

Cette équation de propagation est historiquement fondamentale (son nom est explicite). Quoiqu'historique elle reste d'actualité dans le domaine des télétransmissions filaires, puisqu'elle permet de modéliser le temps que met une information à se propager le long d'un câble coaxial.

L'objet de ce paragraphe est d'établir l'équation de D'ALEMBERT le long d'un câble coaxial modélisé électriquement comme sur la figure 2 Le câble est supposé de longueur infini. Il possède **par unité de longueur** dx une inductance L , une capacité C entre l'âme et le blindage, une résistance r (résistance de l'inductance) et une conductance de fuite g_f entre l'âme et le blindage. On appelle $v(x, t)$ la tension entre le blindage et l'âme et $i(x, t)$ le courant qui traverse l'âme du câble.

III.1. Généralités

III.1. 1. Donner les dimensions de L , C , g_f , r et des produits $L.C$, rC , rL .

III.1. 2. Par analyse dimensionnelle, construire un temps caractéristique, une longueur caractéristique et une vitesse caractéristique à partir de ces quantités.

III.2. Loi des mailles

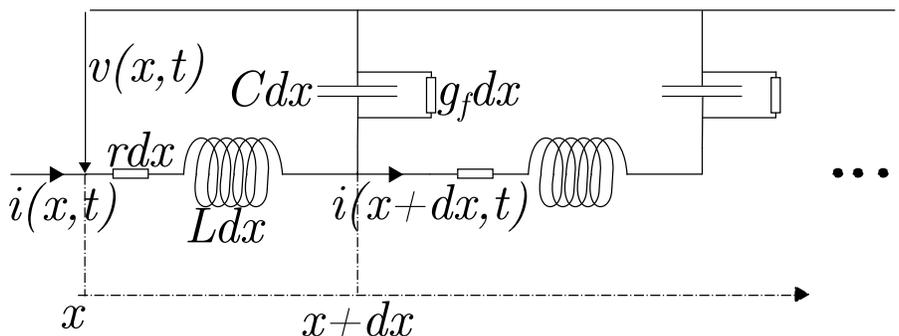


FIGURE 2 – Modélisation électrique d'un élément infinitésimal de longueur dx d'un câble coaxial. L désigne l'inductance par unité de longueur, C la capacité par unité de longueur, r la résistance de l'âme par unité de longueur et g_f la conductance de fuite.

Appliquer la loi des mailles et en déduire la relation entre $\frac{\partial v}{\partial x}$, i et $\frac{\partial i}{\partial t}$.

III.3. Loi des nœuds

Appliquer la loi des nœuds et en déduire la relation entre $\frac{\partial v}{\partial t}$, v et $\frac{\partial i}{\partial x}$. On prendra en compte toujours les variations de même ordre de grandeur.

III.4. Equations de propagation

III.4. 1. En utilisant les deux relations précédentes, trouver les 2 équations différentielles partielles que vérifient v et i .

III.4. 2. Donner un sens physique à chaque terme (on pourra invoquer des arguments de symétries temporelles et spatiales).

III.4. 3. Quelles conditions faut-il sur g_f et r pour retrouver une équation de D'ALEMBERT habituelle.

III.4. 4. Quelles sont les grandeurs physiques qui se propagent ?

III.4. 5. A quoi est homogène le produit $v.i$?

III.4. 6. Peut on parler d'onde transverse ou longitudinale ?

III.4. 7. Exprimer les champs électriques et magnétiques $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en coordonnées polaires (le câble est cylindrique de rayon R_0). Conclure.

IV. Ondes Electromagnétiques

IV.1. Equations de Maxwell

IV.1. 1. Donner les quatres équations de Maxwell dans le vide avec présence de courants électriques et de charges.

IV.1. 2. Donner l'interprétation intégrale ainsi que le nom de la loi physique associée de chacune de ces équations.

IV.2. Equations de propagation des champs

IV.2. 1. Utiliser les quatre équations de Maxwell pour dériver les équations de propagation des champs électrique et magnétique.

IV.2. 2. Que deviennent ces équations lorsque il n'y a ni charges ni courants ?

IV.3. Equations de propagation des potentiels

On souhaite trouver les équations de propagation des potentiels électrique V et potentiel vecteur \vec{A} . On rappelle que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \text{ et } \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

IV.3. 1. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les 2 équations de propagation que vérifient \vec{A} et V .

IV.3. 2. Que deviennent ces équations en l'absence de charges et de courant ? Sont-ce des équations de D'ALEMBERT ?

IV.3. 3. Remarquant que $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}$ (rot(grad)) est nul et que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge$ (div(rot)) est nul, montrer que l'on peut choisir arbitrairement certaines origines pour \vec{A} et V .

IV.3. 4. Comment appelle-t-on ce degré de liberté ?

IV.3. 5. Comment faut il choisir la jauge pour que \vec{A} et V vérifient une équation de D'ALEMBERT ?

IV.3. 6. Comment la nomme-t-on ?

PARTIE B: ÉTABLISSEMENT D'ÉQUATIONS DE DISPERSION PARTICULIÈRES

I. Ondes évanescentes dans un circuit électrique

Reprendre l'équation de propagation du télégraphiste.

- I.1.** Chercher une solution en onde plane, avec la convention de votre choix pour $i(x, t)$ et $v(x, t)$.
- I.2.** Trouver alors la relation de dispersion (entre k le nombre d'onde et ω la pulsation).
- I.3.** Vitesses de phase et de groupe
 - I.3. 1.** Exprimer la vitesse de phase V_φ en fonction des paramètres électriques du circuit.
 - I.3. 2.** Exprimer la vitesse de groupe V_g en fonction des paramètres électriques du circuit.
 - I.3. 3.** Exprimer le produit $V_g.V_\varphi$. Comment s'appelle cette relation ?
- I.4.** Tracer k en fonction de ω .
- I.5.** Sur quelle distance caractéristique s'atténue l'onde ?
- I.6.** En déduire l'existence de 2 régimes possibles selon les valeurs relatives de R, L, C, g_f .
- I.7.** Comment s'appellent les ondes dont la partie imaginaire de k est prédominante ? Pourquoi ce nom ?

II. Ondes électromagnétiques dans un métal conducteur : effet de peau

On considère conducteur de conductivité σ .

- II.1.** Rappeler la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant \vec{j}_e au champ électrique local \vec{E} .
- II.2.** En supposant que dans un métal non parfaitement conducteur, cette loi d'Ohm est respectée, avec une conductivité constante, établir l'équation d'onde que vérifie le champ électrique dans le métal.
- II.3.** En déduire la relation de dispersion dans le métal pour cette onde.
- II.4. II.5.** Vitesses de phase et de groupe
 - II.5. 1.** Exprimer la vitesse de phase V_φ en fonction des paramètres électriques du circuit.
 - II.5. 2.** Exprimer la vitesse de groupe V_g en fonction des paramètres électriques du circuit.
 - II.5. 3.** Exprimer le produit $V_g.V_\varphi$. Comment s'appelle cette relation ?
- II.6.** Tracer k en fonction de ω .
- II.7.** Sur quelle distance δ caractéristique s'atténue l'onde ?
- II.8.** On appelle cette distance épaisseur de peau. Pourquoi ?

II.9. Pourquoi une feuille d'or finement laminée n'est pas opaque et apparaît verte à la lumière du jour ?

III. Milieu dispersif

Pour la lumière visible, l'air est un milieu faiblement dispersif. Cauchy a proposé une modélisation de la variation de l'indice de réfraction n en fonction de la longueur d'onde λ sous la forme :

$$n = n_0 \left(1 + \frac{A}{\lambda^2} \right)$$

III.1. Rappeler la définition de l'indice de réfraction d'un milieu.

III.2. Définir le phénomène de dispersion.

III.3. Donner la dimension de A dans la relation de Cauchy donnée plus haut.

III.4. Supposant que la vibration électromagnétique suit une équation de D'Alembert, établir la relation de dispersion qu'implique le modèle de Cauchy.

III.5. Montrer que l'amplitude de l'onde décroît avec la profondeur d'air traversée. A-t-on fait l'hypothèse que l'air était un milieu dissipatif ?

III.6. Définir le phénomène de dissipation.

III.7. Donner les relations de Kramers-Koenig (elle se trouve dans les livres de référence de l'électromagnétisme). Que signifient-elles physiquement ?

IV. Chaîne de ressorts infinie

On considère une chaîne infinie de ressorts identiques de longueur à vide l_0 et de raideur γ . Entre chaque ressort est disposée une masse M . Toutes les masses sont identiques. Un schéma du dispositif est présenté sur la figure 3. La position de la n ème masse M est repérée par son abscisse $x_n(t)$. Le déplacement de cette masse par rapport à sa position d'équilibre (nl_0) est noté **algébriquement** $u_n(t)$.

IV.1. Grâce à la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle que vérifie $u_n(t)$ en fonction notamment de u_{n-1} et u_{n+1} .

IV.2. On cherche à faire propager une onde longitudinale de déplacement des masses de la forme :

$$\underline{u}_n(x, t) = \underline{u}_0 \exp [j(\omega t - kx)]$$

IV.2. 1. Faisant l'hypothèse que $u_n \ll l_0$, établir la relation de dispersion entre k et ω .

IV.2. 2. Donner alors l'expression de la vitesse de phase V_φ , puis de la vitesse de groupe V_g .

IV.2. 3. Exprimer littéralement le produit $V_\varphi V_g$.

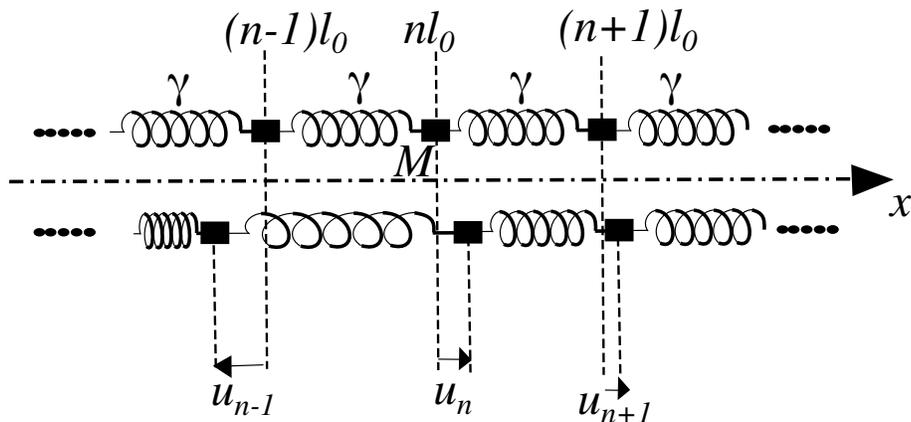


FIGURE 3 – Schéma de la chaîne infinie de ressorts.

IV.2. 4. Tracer la courbe k en fonction de ω

IV.2. 5. Montrer qu'il existe une pulsation ω_m que l'on exprimera en fonction de γ et M à partir de laquelle ($\omega < \omega_m$) l'onde ne peut pas se propager.

IV.3. On essaie d'évaluer maintenant la distance caractéristique d'atténuation de l'onde évanescente dans cette chaîne.

IV.3. 1. En utilisant judicieusement la formule d'Euler dans la relation de dispersion, exprimer k en fonction de ω . Il sera judicieux de poser $X = \exp(jkl_0)$ et de résoudre une équation du second degré.

IV.3. 2. Lorsque $\omega > \omega_m$, exprimer littéralement k .

IV.3. 3. Quelle est la distance d'atténuation caractéristique de l'onde ?

IV.3. 4. Comparer son expression avec celle de δ . Y a-t-il une analogie? **IV.4.** Reprendre succinctement toutes les questions lorsqu'il existe une force de frottement fluide pour chaque masse. Que cela change-t-il aux résultats précédents ?

PARTIE C: RÉFLEXIONS SUR LA RÉFLEXION D'UNE ONDE

I. Une seule interface, incidence normale

On considère une quantité physique \mathcal{O} qui se propage dans une zone de l'espace stratifiée, en deux demi espace infini, comme indiqué sur la figure 4. La vitesse de propagation de l'onde est c_1 dans la zones 1 et c_2 dans la zone 2. La quantité \mathcal{O} se propage selon l'axe x en respectant l'équation de D'ALEMBERT dans les deux demi espaces.

I.1. Comment appelle -t-on de façon générale la surface de séparation entre deux zones de l'espace dans

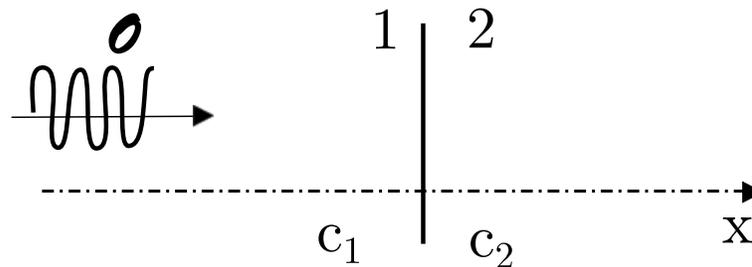


FIGURE 4 – Schéma de la figure de la réflexion et la réfraction d'une onde sur une interface plane

lesquelles la vitesse de propagation d'une onde est différente ?

I.2. Donner deux exemples simples de telles surfaces, un dans le domaine optique, l'autre dans le domaine mécanique.

I.3. Une onde incidente arrive de l'espace $x < 0$, se propageant dans le **sens** de \vec{e}_x . Quels sont les deux termes que l'on emploie pour définir les deux phénomènes physiques qui sont observés au niveau de la surface de séparation ?

I.4. Coefficients de réflexion et de transmission.

Dans la zone 1, l'onde, \mathcal{O}_1 peut alors se décrire comme la combinaison d'une onde incidente d'amplitude complexe \mathcal{O}_i et d'une onde réfléchie d'amplitude complexe \mathcal{O}_r . Dans la zone 2, on décrit l'onde transmise \mathcal{O}_2 comme une onde progressive d'amplitude complexe \mathcal{O}_t . On considère qu'en $x = +\infty$, il n'y a pas de réflexion (condition de bords libres) et il n'y a donc pas d'onde rétrograde. On écrira donc :

$$\text{en zone 1 } (x < 0), \mathcal{O}_1(M, t) = \mathcal{O}_i \exp[j\omega t - jk_1 x] + \mathcal{O}_r \exp[j\omega t + jk_1 x]$$

$$\text{et en zone 2 } (x > 0), \mathcal{O}_2(M, t) = \mathcal{O}_t \exp[j\omega t - jk_2 x]$$

I.4. 1. Montrer que pour que \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 soient solutions des deux équations de D'ALEMBERT dans 1 et 2, il faut que :

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1}, \text{ et que } k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2}$$

I.4. 2. Comment appelle-t-on de façon générale la relation entre le nombre d'onde k et la pulsation ω ?

I.4. 3. A l'interface ($x = 0$), comment appelle-t-on généralement les conditions que doit respecter l'onde pour passer du milieu 1 au milieu 2 ?

I.4. 4. On suppose ici que \mathcal{O} doit être continu en $x = 0$ à tout instant. Ecrire alors la relation que doivent respecter \mathcal{O}_i , \mathcal{O}_r et \mathcal{O}_t

I.4. 5. Montrer alors que la relation que doivent respecter les coefficients complexes, d'une part en réflexion $r = \frac{\mathcal{O}_r}{\mathcal{O}_i}$ et d'autre part en transmission $t = \frac{\mathcal{O}_t}{\mathcal{O}_i}$ pour l'amplitude est :

$$1 + r = t \quad (1)$$

I.5. Cas d'une onde sonore

On se propose dans cette question de trouver une formulation pour les coefficients r et t en fonction des caractéristiques des deux milieux dans le cas d'une onde sonore se propageant dans les milieux 1 et 2 considérés comme des fluides liquides, de masse volumique respective à l'équilibre ρ_1 et ρ_2 et de coefficient de compressibilité χ_s^1 et χ_s^2 identique de part et d'autre de l'interface. On appelle $\vec{v}(x, t)$ le champ de vitesse local dans les fluides. C'est cette quantité qui se propage et que l'on étudie. La quantité \mathcal{O} , générale, utilisée dans les questions précédentes est donc ici **la projection sur l'axe \vec{e}_x** de la quantité $\vec{v}(x, t)$. Ainsi la vitesse s'écrit de part et d'autre de l'interface :

$$x < 0, \vec{v}_1(x, t) = v_i \exp[j\omega t - k_1 x] \vec{e}_x + v_r \exp[j\omega t + k_1 x] \vec{e}_x$$

et

$$x > 0, \vec{v}_2(x, t) = v_t \exp[j\omega t - k_2 x] \vec{e}_x$$

La vitesse du fluide doit être continue à l'interface, par la définition même de cette dernière. Cette relation est la relation (1) déjà obtenue. Si l'on veut déterminer les coefficients r et t (deux inconnues donc), il nous faut une deuxième équation pour compléter l'équation (1).

I.5. 1. Rappeler la relation existant entre la célérité de l'onde c , le coefficient χ_s et la masse volumique ρ . On pourra la retrouver par analyse dimensionnelle le cas échéant.

I.5. 2. Dans un déplacement de matière quelle quantité se conserve ?

I.5. 3. On rappelle que l'équation de conservation de la masse s'écrit en une dimension :

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \rho \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Montrer que dans le cas de l'onde sonore dans le milieu stratifié :

$$\rho_1 \left(\frac{v_i}{c_1} - \frac{v_r}{c} \right) = (p_i + p_r) \rho_1 \chi_s^1$$

et que :

$$\rho_2 \frac{vt}{c_2} = p_t \rho_2 \chi_s^2$$

où p_i , p_r et p_t désignent les amplitudes complexes de la surpression.

I.5. 4. La pression doit aussi être continue à l'interface. Ecrire la relation que cela implique entre p_i , p_r et p_t .

I.5. 5. En déduire alors que :

$$1 - r = \frac{c_1}{c_2} t \quad (2)$$

I.5. 6. Montrer, en utilisant (1) et (2), qu'on a alors :

$$t = \frac{2}{1 + \frac{c_1}{c_2}} \text{ et } r = \frac{1 - \frac{c_1}{c_2}}{1 + \frac{c_1}{c_2}}$$

I.5. 7. Tracer les coefficients r et t en fonction du rapport $\frac{c_1}{c_2}$. **I.5. 8.** Faire une discussion sur les comportements asymptotiques et sur l'annulation de ces coefficients.

II. Une seule interface, incidence quelconque

L'onde incidente arrive maintenant sur l'interface plane en faisant un angle α_i avec la normale de l'interface comme représenté sur la figure 5. On se propose dans cette partie de retrouver les règles géométriques de la

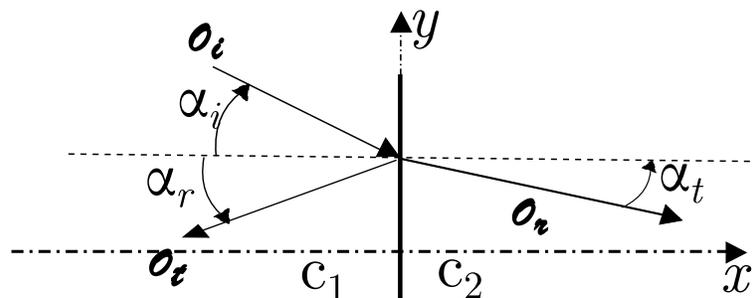


FIGURE 5 – Schéma de la réflexion d'une onde en incidence quelconque

réfraction et de la réflexion et d'en voir les conséquences sur les coefficients de réflexion et transmission r et

t . Les vecteurs d'ondes incidente, réfléchi et transmis s'écrivent ont pour expression respective dans le plan de la figure :

$$\vec{k}_i = k_1 \cos(\alpha_i) \vec{e}_x + k_1 \sin(\alpha_i) \vec{e}_y, \quad \vec{k}_r = -k_1 \cos(\alpha_r) \vec{e}_x + k_1 \sin(\alpha_r) \vec{e}_y, \quad \vec{k}_t = k_2 \cos(\alpha_t) \vec{e}_x + k_2 \sin(\alpha_t) \vec{e}_y$$

avec $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$ et $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$.

Les amplitudes complexes de l'onde dans les deux milieux s'écrivent alors au point M de coordonnées (x, y) :

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_i \exp [j\omega t - j\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{\text{OM}}] + \mathcal{O}_r \exp [j\omega t - j\vec{k}_r \cdot \overrightarrow{\text{OM}}]$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_t \exp [j\omega t - j\vec{k}_t \cdot \overrightarrow{\text{OM}}]$$

II.1. Exprimer $\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{\text{OM}}$ en fonction de k_1 , α_i , x et y .

II.2. Exprimer $\vec{k}_r \cdot \overrightarrow{\text{OM}}$ en fonction de k_1 , α_r , x et y .

II.3. Exprimer $\vec{k}_t \cdot \overrightarrow{\text{OM}}$ en fonction de k_2 , α_t , x et y .

II.4. Ecrire la condition de continuité de l'onde à l'interface.

II.5. Cette condition doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de t et quelle que soit la valeur de y . En déduire qu'on doit nécessairement avoir :

$$k_1 \sin(\alpha_i) = k_2 \sin(\alpha_t) \text{ et } |\alpha_i| = |\alpha_r|.$$

II.6. En optique sous quel nom connaît-on ces deux règles? Peut-on généraliser la notion d'indice de réfraction d'une onde?

II.7. Comment doivent être modifiées les relations (1) et (2) pour tenir compte de l'angle d'incidence, dans le cas d'une onde sonore?

II.8. Exprimer alors r et t en faisant apparaître les angles d'incidence et de réfraction.

II.9. Connaissez-vous une expérience d'optique permettant de polariser une onde par réflexion sur une surface conductrice?

—FIN—

PARTIE D: QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES ONDES STATIONNAIRES
I. Conditions de bord dures : corde d'instrument de musique

La corde de longueur L est maintenant attachée à ses deux extrémités, tout en étant tendue par la force F_0 comme dans la partie I, et comme présenté sur la figure 6. De façon générale on appelle des conditions de bords imposées sur l'amplitude conditions de DIRICHLET.

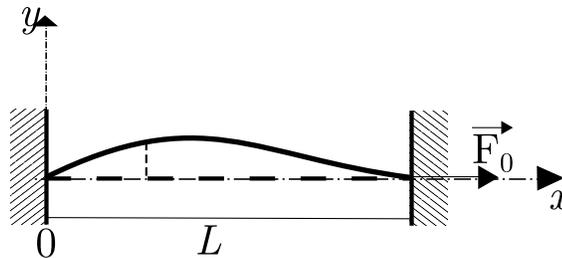


FIGURE 6 – Corde horizontale maintenue proche de sa position d'équilibre par la tension. En traits pointillés, la corde à l'équilibre, en traits pleins, la corde déplacée localement et verticalement. La longueur entre les deux supports est L

I.1. Ecrire les deux conditions que doit vérifier le déplacement vertical de la corde $h(x, t)$ en $x = 0$ et $x = L$, à tout instant t .

I.2. Ondes stationnaires

On note $\underline{h}_-(x, t)$ l'amplitude complexe de l'onde progressive et $\underline{h}_+(x, t)$ l'amplitude complexe de l'onde rétrograde. On écrira donc :

$$\underline{h}_-(x, t) = h_1 \exp(j\omega t - kx) \text{ et } \underline{h}_+(x, t) = h_2 \exp(j\omega t + kx)$$

L'amplitude complexe du déplacement vertical $\underline{h}(x, t)$ sera donc :

$$\underline{h}(x, t) = \underline{h}_-(x, t) + \underline{h}_+(x, t)$$

I.2. 1. Appliquer la condition de bord en $x = 0$ et en déduire la relation entre h_1 et h_2 .

I.2. 2. Appliquer la condition de bord en $x = L$ et en déduire la condition devant exister entre k et L pour que des ondes puissent exister.

I.2. 3. Montrer alors que :

$$h(x, t) = H_0 \cos(\omega t) \sin(kL + \phi)$$

où l'on exprimera les constantes H_0 et ϕ en fonction des données du problèmes.

I.2. 4. Comment doit être la longueur d'onde λ en fonction de L ?

I.2. 5. Représentation : Faire un joli schéma représentant la corde à deux instants différents, pour un mode $n > 1$. Comment appelle-t-on les points de vibration maximale et ceux de vibration nulle? Il est conseillé de faire un légende et d'utiliser des couleurs.

I.3. Bruit musical, fanfare et philharmonie

Cette corde modélise une corde d'instrument de musique. On va s'intéresser aux modes possibles de vibrations de cet objet.

I.3. 1. Définir le mode fondamental de vibration de la corde à partir des résultats de la question II.2

I.3. 2. Exprimer la fréquence f de vibration de la corde en fonction du numéro de mode n , de la longueur de la corde, de la vitesse c de la corde.

I.3. 3. Application numérique, calculer la force F_0 nécessaire pour obtenir une vibration à 400Hz pour une corde de longueur $L = 1$ m, de masse linéique $\mu = 10^{-2}$ kg/m, pour le mode fondamental.

I.3. 4. Comparer cette force à une force quotidienne (poids d'un objet, ...). Vous semble-t-elle importante?

I.3. 5. Sur cette corde, calculer numériquement les fréquences f_2 , f_3 , f_7 des harmoniques 2, 3 et 7.

I.3. 6. Sur quels paramètres physiques peut-on jouer pour modifier la fréquence associée au mode de vibration fondamental (on parle de note fondamentale) d'une corde? Expliquer pourquoi un instrument à corde est composé de différentes cordes de différents matériaux?

I.3. 7. Donner 208 exemples d'instruments de musique dont on peut modifier la tonalité en jouant sur la tension de la corde. (On prendra soin de numéroter tous les exemples).

II. Analyse de Fourier des conditions initiales d'excitation de la corde

On veut comparer dans cette question les différents modes excités selon la façon dont la corde est initialement attaquée par le musicien. Pour cela on a considéré une corde initialement pincée puis ensuite une corde frappée.

II.1. La corde est pincée à l'instant initial entre les doigts du musicien ou par une agraphe (clavecin). On peut modéliser la corde à l'instant initial comme un "triangle", de base L et de hauteur h_0 , comme sur la figure 7.

II.1. 1. Que doivent vérifier relativement l'un par rapport à l'autre h_0 et L pour que l'on soit dans les conditions d'utilisation de la corde de Melde?

II.1. 2. La fonction $h(t = 0, x)$ représentant la hauteur de la corde en fonction de x à l'instant initial peut être vue comme le motif élémentaire d'un signal périodique de période spatiale L . On peut ainsi la

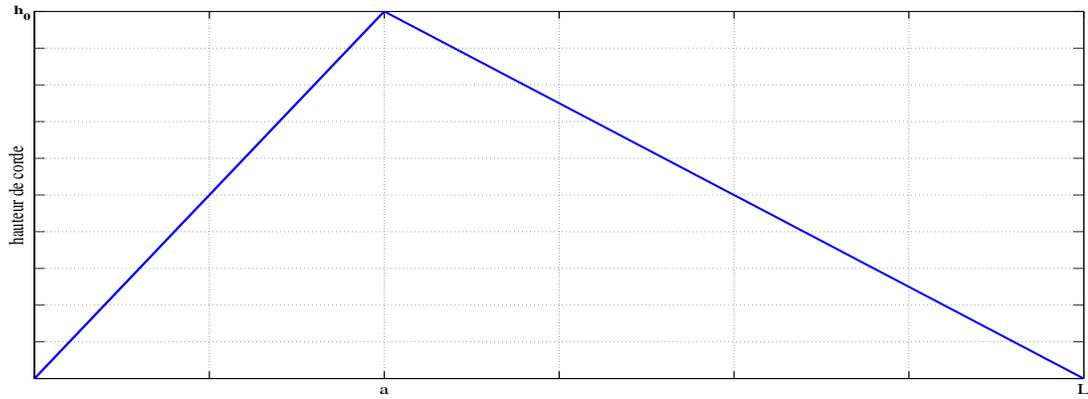


FIGURE 7 – Position initiale de la corde de clavecin "pincée".

développer en série de Fourier :

$$h(t = 0, x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} h_n^c \exp\left(j \frac{2\pi}{L} n x\right)$$

Exprimer les coefficients de Fourier complexes $\{h_n^c\}$ (l'exposant c désignant le mot clavecin) de la fonction $h(t = 0, x)$ en fonction de L, a, h_0 et n .

II.1. 3. Tracer l'allure de l'évolution de leur module en fonction de n .

II.1. 4. Par la relation de dispersion en déduire l'expression des fréquences f_n excitées par cette "attaques". Représenter l'allure de la puissance associée à chaque harmonique en fonction de n .

II.1. 5. Application numérique. Le mode fondamental f_1 correspond à $f_1 = 400\text{Hz}$, on suppose qu'il a une puissance associée P_1 . Quels sont les valeurs numériques des rapports des puissances $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_7}{P_1}, \frac{P_{10}}{P_1}, \frac{P_{100}}{P_1}$ respectivement associées aux modes 2, 7, 10, 100 ?

II.2. La corde est maintenant frappée à l'instant initial par un marteau (piano). On peut modéliser la corde à l'instant initial comme une arche de fonction trigonométrique sur une longueur L , une hauteur h_0 , comme sur la figure 8.

On suppose que la hauteur de la corde $h(t, x)$ peut se modéliser à l'instant initial comme une fonction définie par morceau et comprenant une arche de fonction trigonométrique. Ainsi on modélise $h(0, x)$ comme la fonction :

$$h(t = 0, x) = 0 \text{ pour } x \in [0, a]; h(t = 0, x) = G \cos(Qx + \beta) \text{ pour } x \in [a, a+b]; h(t = 0, x) = 0 \text{ pour } x \in [a+b, L];$$

II.2. 1. Etablir les expressions de G, Q et β en fonction de L, a, b, h_0 .

II.2. 2. Pour vérifier la cohérence de votre réponse, réfléchir à ce qui se passe lorsque $a = 0$ et $b = L$, que

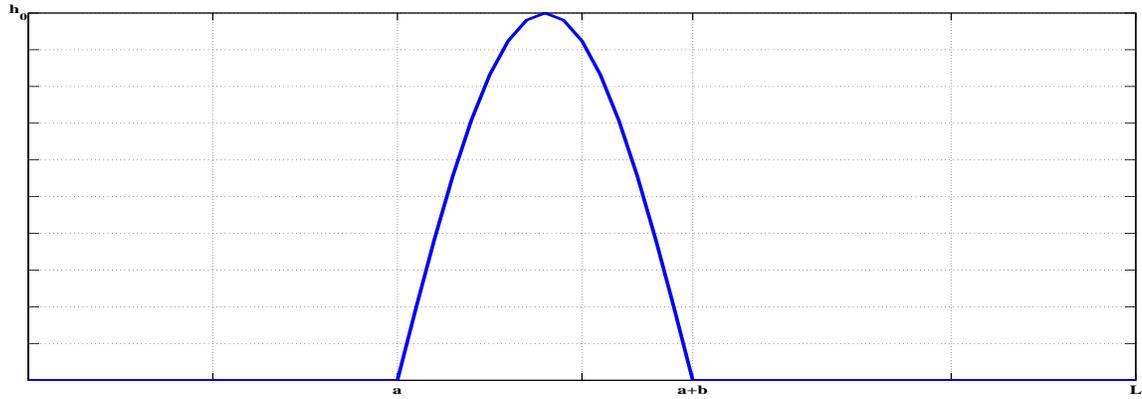


FIGURE 8 – Position initiale de la corde de piano "frappée".

doit on retrouver pour h_n^p ?

II.2. 3. Reprendre les mêmes questions que pour la corde de clavecin, le but étant d'arriver à comparer les rapports de puissances $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_7}{P_1}, \frac{P_{10}}{P_1}, \frac{P_{100}}{P_1}$ pour les deux cordes !

II.3. Comparer la richesse harmonique de ces deux façons de faire vibrer la corde.

III. Conditions de bords libres : Expérience de LIEUTAUD

P. LIEUTAUD a proposé une modification du dispositif de MELDE, permettant de modifier la condition aux bord $x = L$. On peut schématiser le dispositif expérimental comme présenté sur la figure 9. L'extrémité de la corde en $x = L$ est attachée à un chariot mobile qui se déplace sans frottement sur des rails verticaux, et dont le poids est compensé par un dispositif extérieur. La corde est toujours maintenu sous tension F_0 , conformément aux hypothèses de la partie I.

III.1. A l'aide des questions du paragraphe I, **montrer** qu'en $x = L$, la condition qui s'applique est

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x = L, t) = 0 \text{ à tout instant } t$$

III.2. Reprendre les questions II.1 et II.2 dans ce cas de figure.

III.3. Montrer ainsi que

$$h(x, t) = H_0 \cos(\omega t) \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) \text{ avec } n \text{ entier impair}$$

III.4. Qu'observe-t-on en $x = L$?

III.5. Question annexe. Le poids du chariot Ch est compensé par un ventilateur qui souffle de l'air verticalement de telle manière à faire léviter le chariot. La masse du chariot est M , la surface de sa base qu'il

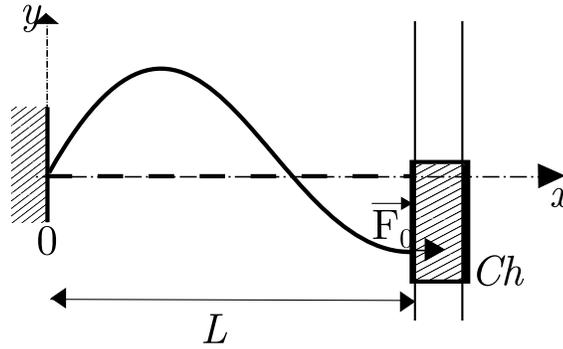


FIGURE 9 – Corde horizontale maintenue proche de sa position d'équilibre par la tension. En traits pointillés, la corde à l'équilibre, en traits pleins, la corde déplacée localement et verticalement. La longueur entre les deux supports est L . Le chariot Ch est de poids négligeable, si bien que la corde est "libre" à son extrémité L

expose au flux d'air est S_0 . La masse volumique de l'air est ρ , la vitesse de l'air propulsé par le ventilateur est ve .

III.5. 1. Par analyse dimensionnelle proposer une relation entre le poids du chariot et les quantités ρ , S_0 , ve .

III.5. 2. En déduire l'expression de la puissance P_0 nécessaire pour faire léviter le chariot .

III.5. 3. Les pales du ventilateur sont entraînées par un moteur électrique. Est il préférable d'utiliser un moteur triphasé, monophasé ou à courant continu ?

IV. Résonnateurs optiques

En optique, les systèmes d'ondes stationnaires sont fréquemment utilisés en interférométrie et dans le laser. Nous allons étudier ici une cavité particulière composée de deux lames semi-réfléchissantes se faisant face comme représenté sur la figure 10. Elle est utilisée dans l'interféromètre Fabry-Perot et dans les lasers.

Les lames semi-réfléchissantes sont de simples lames de verre dont l'arrière a été métallisé (en fait comme un miroir) mais très finement. Ces lames laissent passer (transmettent) une partie de la lumière et réfléchissent l'autre. Le terme "semi" est ambigu. Les lames de bonne qualité laissent passer beaucoup moins de lumière (moins de 1% de la puissance généralement) et en réfléchissent plus de 99%. Dans cette cavité , la lumière est donc partiellement piégée, puisqu'elle se réfléchit d'une paroi à l'autre.

IV.1. Généralités

Une onde lumineuse, plane monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , d'amplitude complexe \underline{a}_0 , atteint la lame du côté gauche avec une incidence i proche de la normale comme sur la figure 10. L'angle i est ici

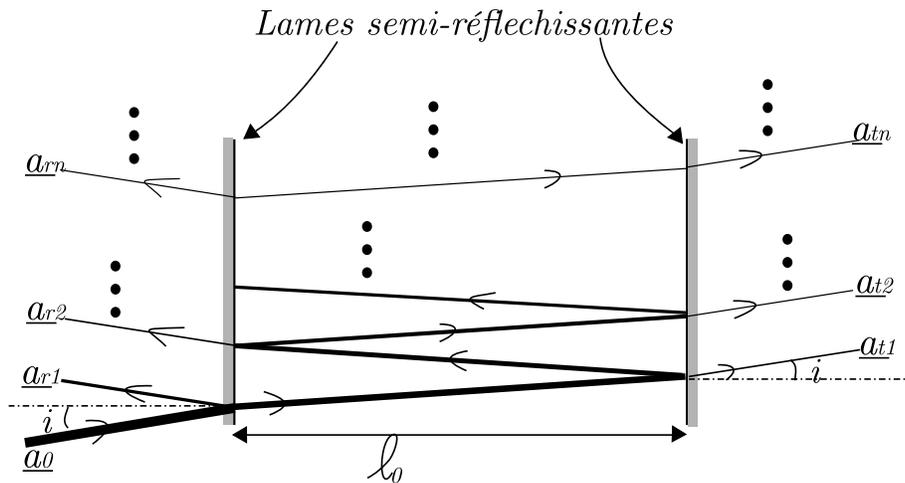


FIGURE 10 – Cavité optique résonnante. 2 lames semi-réfléchissantes se font face à une distance ℓ_0

considéré **comme nul**.

IV.1. 1. Rappeler les définitions de r et t les coefficients (a priori complexes) de réflexion et de transmission en amplitude. Quels sont les relations entre $R = |r|^2$, $T = |t|^2$, r et t ? Pourquoi les coefficients r et t sont a priori complexes ?

IV.1. 2. Exprimer l'amplitude complexe transmise \underline{a}_{t1} en fonction de r , t , ℓ_0 , λ_0 et \underline{a}_0 .

IV.1. 3. Exprimer l'amplitude complexe transmise \underline{a}_{t2} en fonction de r , t , ℓ_0 , λ_0 et \underline{a}_0 .

IV.1. 4. En déduire l'expression de l'amplitude transmise \underline{a}_{tn} au bout de n transmission sur l'ensemble de la cavité.

IV.1. 5. L'amplitude complexe transmise totale dans la direction i est donc :

$$\underline{A} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \underline{a}_{tn}$$

Exprimer le plus simplement possible \underline{A} en fonction de r , t , ℓ_0 et λ_0 .

IV.1. 6. On pose $I_t = |\underline{A}|^2$. Donner son expression en fonction de $R = |r|^2$ et $T = |t|^2$.

IV.1. 7. Comparer numériquement I_t à $I_0 = |\underline{a}_0|^2$ pour $R = 0,995$. Conclure sur le paradoxe levé.

IV.1. 8. Tracer l'allure de la courbe I_t en fonction de ℓ_0 .

IV.1. 9. Définir et exprimer simplement le facteur de qualité Q de la cavité. Le calculer numériquement avec les données précédentes. Comparer ce facteur de qualité avec celui que vous avez vu en électronique.

IV.1. 10. Pourquoi cette cavité est appelée cavité résonnante ?

IV.2. Utilisation en laser.

L'excitation du laser est assurée par une décharge électrique qui fait passer les atomes d'un gaz (mélange

hélium-néon pour le cas qui nous intéresse) dans un état excité. Le gaz est contenu dans l'enceinte résonnante formée par les deux parois semi-réfléchissantes. Par rapport à la figure 10, l'amplitude d'attaque a_0 n'existe donc pas, la lumière est produite dans la cavité. L'émission laser est assurée par un phénomène que l'on appelle l'émission stimulée. Elle se produit quand des atomes dans un état excités (non fondamental) sont exposés à une onde électromagnétique. Les atomes excités se mettent alors à émettre avec la même longueur d'onde que l'onde électromagnétique. Ainsi sous certaines conditions, il est possible d'amplifier la puissance lumineuse associée à l'onde monochromatique. La cavité joue alors le rôle de résonateur, le gaz d'amplificateur.

IV.2. 1. Donner un circuit électrique analogue à ce système. On pourra s'inspirer de l'enseignement d'électronique et même demander à son enseignant une réponse à cette question. Donner le nom de l'enseignant d'électronique.

IV.2. 2. Que signifie l'acronyme historique L.A.S.E.R ?

IV.2. 3. Chercher et donner la longueur d'onde λ_r du laser rouge Helium-Néon (He-Ne). Si $\ell_0 \sim 1$ m. Quels sont les ordres possibles pour l'établissement d'un système d'onde stationnaire pour cette longueur d'onde ?

IV.2. 4. Les miroirs sont de taille "humaine" : quelques centimètres de côté. Chercher et donner l'ordre de grandeur de l'incertitude (en mécanique on parle de jeu) classique de positionnement de pièces mécaniques de cette taille (on pourra par exemple prendre les ordres de grandeur rencontrés dans l'industrie aéronautique).

IV.2. 5. On suppose que ℓ_0 a une incertitude $\delta\ell_0$. Faire l'application numérique sur l'incertitude des numéros de mode δn que cela implique pour la cavité.

IV.2. 6. Expliquer en quoi cela n'a aucune importance sur le fonctionnement du laser.

IV.2. 7. Un oscillateur entretenu est de façon générale un oscillateur rebouclé sur lui même avec une contre réaction amplifiée juste de telle façon que l'oscillation ne s'amortisse pas. Comparer les qualités des oscillateurs et des amplificateurs optique et électronique.

IV.3. Interféromètre de Fabry-Perot.

La cavité est utilisée ici comme interféromètre en transmission. Une onde lumineuse, produite à l'extérieur du dispositif, plane monochromatique, de longueur d'onde λ_0 , d'amplitude complexe a_0 , atteint la lame du côté gauche avec une incidence i proche de la normale comme sur la figure 10. L'angle i est tout petit (approximation de Gauss) mais pas nul. Une partie de l'onde est transmise à la cavité, l'autre réfléchi. La partie réfléchi continue son trajet dans la cavité. Quand elle atteint la deuxième lame, une partie de la lumière est transmise (à droite) et l'autre partie est réfléchi à l'intérieur de la cavité et ainsi de suite. On appelle r et t les coefficients (a priori complexes) de réflexion et de transmission en amplitude.

IV.3. 1. L'amplitude complexe transmise totale dans la direction i est donc :

$$\underline{A(i)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{a_{tn}}$$

En reprenant la méthode de calcul présentée dans la section "Généralités", exprimer le plus simplement possible $\underline{A(i)}$ en fonction de r , t , ℓ_0 , λ_0 et i . On rappelle pour cela que la différence de marche $\delta(i)$, introduite par une lame d'épaisseur ℓ_0 sous incidence i est $\delta(i) = 2\ell_0 \cos(i)$.

IV.3. 2. On pose $I_t(i) = |\underline{A(i)}|^2$. Etudier rapidement puis tracer la fonction $I_t(i)$ en fonction de i .

IV.3. 3. En déduire la forme géométrique des franges d'interférence à la sortie du dispositif. Il n'est pas interdit d'aller se documenter dans les livres ou sur internet pour voir des photos de tels interférogrammes.

IV.3. 4. On considère maintenant $I_t(i)$ comme une fonction de tous les paramètres physiques intervenant dans son expression (sauf R et T supposés connus parfaitement). C'est à dire que l'on considère $I_t(i, \ell_0, \lambda)$.

En vous inspirant du calcul classique des incertitudes, exprimer le plus simplement la variation dI_t :

$$dI_t = \left(\frac{\partial I_t}{\partial i} \right)_{\ell_0, \lambda} di + \left(\frac{\partial I_t}{\partial \ell_0} \right)_{i, \lambda} d\ell_0 + \left(\frac{\partial I_t}{\partial \lambda} \right)_{i, \ell_0} d\lambda$$

IV.3. 5. En vous aidant du critère optique de résolution connu sous le nom de critère de Rayleigh, définir la finesse \mathcal{F} de ce dispositif interférométrique. Quel est le lien entre \mathcal{F} et le facteur de qualité Q de la cavité résonnante ?

IV.3. 6. Comparer numériquement cette finesse avec celle du Michelson. Qu'en conclure ?

IV.3. 7. En vous aidant de toutes les documentations disponibles, trouver quelques applications spectaculaires de l'utilisation de ces dispositifs, en particulier en astronomie.