Contrôle Continu 1 : Vibration

Remarque importante : L'usage de tout appareil électronique ainsi que de tout document est est interdit. Le temps de l'épreuve est de 180 minutes. Il est conseillé de lire attentivement tout l'énoncé avant de commencer à rédiger. Les réponses qui ne seront pas correctement rédigées (avec des phrases complètes, des remarques pertinentes, des unités aux applications numériques) **ne seront pas corrigées**. Toutes les questions ne peuvent être traités dans ce temps imparti : il faut bien faire ce que vous décidez de faire plutôt que de papilloner.

1 Les choses indispensables à connaître (les questions de cours....)

1.1 Constantes

1. Donner la valeur et l'unité dans le système international des constantes physiques suivantes considérées comme fondamentales :
   c vitesse de la lumière dans le vide, ε_0 permittivité diélectrique du vide, μ_0 perméabilité magnétique du vide, $\mathcal{G}$ constante de gravitation universelle, h constante de Planck, k_B constante de Boltzmann, $\mathcal{R}$ constante des gaz parfaits, $\mathcal{N}$ nombre d'Avogadro, α_0 constante de structure fine, e la valeur de la charge élémentaire (proton ou électron), m_p masse du proton, m_n masse du neutron, m_e masse de l'électron.
2. Donner l'ordre de grandeur des quantités physiques suivantes : R_T rayon de la Terre, c_s vitesse du son dans l'air au niveau de la mer, h_a hauteur de l'atmosphère terrestre, v_s vitesse de satellisation à la surface de la Terre, H_u âge de l'Univers, f_0 fréquence du "La" de référence, δf bande passante en fréquence de l'oreille humaine.

1.2 Généralités sur les vibrations

1. Définir en quelques lignes et un schéma ce qu'est un phénomène de vibration.
2. Donner un exemple concret d'un tel phénomène.
3. Donner une équation différentielle qui caractérise un tel phénomène. Il faudra spécifier clairement les notations utilisées.
4. Définir ce qu'est un régime harmonique libre. Donner un exemple physique.
5. Définir ce qu'est un régime harmonique forcé. Donner un exemple physique.
6. Un enfant de 10 ans remplace son petit frère de 6 ans sur une balançoire. Lequel des deux est raisonnablement le plus lourd. Lequel des deux fera osciller la balançoire plus vite ? Justifier la réponse.

2 Circuit Bouchon

En électronique, on dénote traditionnellement par l'appellation circuit bouchon le circuit constitué par la mise en parallèle d'une résistance R, d'une inductance L et d'une capacité C.
- Faire un schéma du circuit

2.1 Oscillations libres

2.1.1 Circuit seul

Le circuit est abandonné à lui-même, à l'instant $t = 0$, avec la capacité chargée avec une charge Q_0.

- Trouver les quatre équations différentielles que vérifient les courants $I_R(t)$, $I_C(t)$, $I_L(t)$ dans les trois branches du circuit ainsi que la tension aux bornes du circuit.
- Résoudre ces trois équations.
- Tracer les caractéristiques électriques pour chacun des dipôles élémentaires (R, L, C) selon le régime de l'oscillateur (quasi-périodique ou amorti) et faire une analogie avec la trajectoire dans l'espace des phases en mécanique.

2.1.2 Circuit bouchon en série avec une résistance

On place une résistance r en série avec le circuit bouchon. A l'instant $t = 0$, la capacité est chargée avec la charge Q_0, et on ferme le circuit sur lui-même.

- Faire un schéma du montage.
- Mêmes questions que dans la partie précédente. On pourra s'en inspirer pour répondre rapidement

2.2 Oscillations forcées

Le circuit précédent est maintenant alimenté par une tension harmonique de pulsation ω et d'amplitude U_0. On s'intéresse à la tension U_B aux bornes du circuit bouchon

- En utilisant les amplitudes complexes, exprimer la fonction de transfert complexe $\underline{H}$ en fonction de $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ et $\tau = RC$.
- Représenter graphiquement le module et l'argument de $\underline{H}$ en fonction de $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.
- Définir le facteur de qualité Q. Trouver son expression en fonction de ω_0 et τ.
- Donner une application classique de ce type de montage en télétransmission.

3 Oscillateur mécanique fondamental : le ressort

3.1 Horizontal

On considère un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0, reposant horizontalement sur une tige métallique qui n'a pas d'autre fonction que de le maintenir horizontalement. Au bout du ressort est accrochée une masse M, considérée comme ponctuelle. Il n'y a aucun frottement gênant les mouvements.

1. Faire un schéma du dispositif avec des axes correctement nommés et placés.
2. Démontrer l'équation différentielle du mouvement de la masse M.
3. Résoudre cette équation dans les trois cas suivants :
   (a) Initialement (à l'instant $t = 0$) la masse est à la position X_0 à vitesse nulle
   (b) Initialement (à l'instant $t = 0$) la masse est à la position $X_0 = 0$ à vitesse non nulle $\dot{X}_0$.
   (c) Initialement (à l'instant $t = 0$) la masse est à la position X_0 à vitesse non nulle $\dot{X}_0$.
4. Exprimer chacune des solutions trouvées d'une part avec les fonctions trigonométriques classiques puis d'autre part avec le formalisme complexe de l'amplitude complexe (amplitude et phase).

3.2 Ressort vertical

Le ressort est maintenant vertical. Il est accroché à un bâti à une de ses extrémités, et à l'autre extrémité est accrochée une masse M.

1. Faire un schéma du dispositif, en y faisant figurer des axes nommés et les notations des positions du ressort.

2. Lorsque le ressort est à l'équilibre (il ne bouge pas), écrire le principe fondamental de la dynamique. En déduire l'expression de la longueur à vide du ressort l_1, en fonction de l_0 et M.
3. En déduire alors l'équation différentielle que vérifie le ressort.
4. Résoudre analytiquement cette équation dans le cas général où à l'instant initial le ressort n'est pas dans sa position d'équilibre et sa vitesse n'est pas nulle. On spécifiera clairement ses notations.
5. Ecrire la solution dans le formalisme complexe.

3.3 Dissipation linéaire

Reprendre les deux cas (horizontal et vertical) dans le cas où il existe une force de frottements fluides (coefficient de dissipation f) proportionnelle à la vitesse.

4 Oscillateurs couplés

On considère deux masses identiques rattachées par un système de trois resorts de raideurs k, γ et k comme présenté sur la figure 1. Les positions relatives à l'équilibre sont notées respectivement u_1 et u_2.

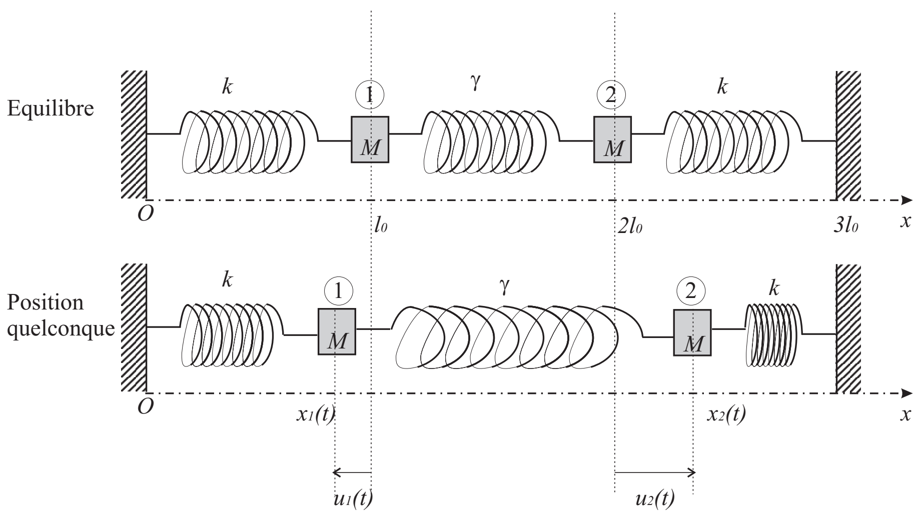

Figure 1 – *Système d'oscillateurs mécaniques couplés*

4.1 Oscillations libres

- Par la méthode de votre choix établir les deux équations différentielles couplées que doivent vérifier u_1 et u_2.
- Par la méthode de votre choix, résoudre ce système linéaire en exhibant les deux modes propres : fréquences et combinaison linéaire des deux déplacements.
- Tracer les deux fréquences propres ω_1^p et ω_2^p en fonction du rapport γ/k.
- Définir deux cas limites : faible couplage et fort couplage.
- En raisonnant sur la somme et la différence de ω_1 et ω_2, représenter graphiquement l'allure du mouvement d'une des deux masses au cours du temps dans chacun des cas.

4.2 Oscillations forcées

Le bâti de droite est maintenant animé d'un mouvement harmonique de pulsation ω et d'amplitude A_0. Le système étudié est donc en régime harmonique forcé.

- En utilisant les amplitudes complexes, exprimer les deux fonctions de transfert $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$ correspondant au mouvement des deux masses, en fonction de ω_1 et ω_2.
- Représenter graphiquement le module et la phase de ces deux fonctions de transfert en fonction de la pulsation. On commentera selon les valeurs relatives de ω_1 et ω_2.
- Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'excitation est aux alentours de ω_1 ou ω_2 ? Comment appelle-t-on ce phénomène ?
- Décrire qualitativement ce qui se passerait si l'on disposait de N ressorts avec $N > 2$.
- Citer quelques exemples historiques de systèmes résonnants mal ou bien conçus.

5 Une application du ressort vertical

On considère un ressort de raideur k et de longueur **à vide** l_0. Ce ressort est posé verticalement sur un bâti et une masse M est accrochée en haut du ressort.

5.1 Statique

- Faire un schéma du dispositif, avec les axes de projections.
- Exprimer la longueur l_1 **d'équilibre** du dispositif masse ressort en fonction de M, g, k et l_0.

5.2 Oscillations libres

- Etablir l'équation différentielle que vérifie la côte $y(t)$ de la masse (position de la masse par rapport à la longueur d'équilibre).
- Exprimer la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. Décrire sa trajectoire dans l'espace des phases.

5.3 Oscillations forcées

5.3.1 Sans amortissement

- Etablir la fonction de transfert complexe (en amplitude complexe donc) lorsque le bâti oscille à la pulsation ω.
- Tracer les allures du module et de la phase de cette fonction de transfert en fonction de ω.
- Que se passe-t-il si $\omega = \omega_0$? Comment nomme -t-on ce phénomène ? Donner des exemples.

5.3.2 Avec amortissement

Le déplacement du ressort est maintenant amorti par un dispositif hydraulique qui assure une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de la masse.

- Ecrire la forme de cette force de frottements. Etablir la nouvelle fonction de transfert complexe du système. Tracer l'allure de son module et de sa phase en fonction de ω. Peut on observer le phénomène précédent ? A quelle conditions ?
- On suppose maintenant que le bâti est animé d'un mouvement comprenant plusieurs pulsations différentes. On décrit le mouvement de la côte $z(t)$ du bâti sous la forme suivante :

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t) + z_1 \cos(\omega_1 t) + z_2 \cos(\omega_2 t) \text{ avec } \omega_1 = 2\omega_0/3 \text{ et } \omega_2 = 3\omega_0/2.$$

Justifier le fait que la côte $y(t)$ s'écrira sous la forme :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + y_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + y_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

– En utilisant la fonction de transfert complexe, exprimer y_0, y_1, y_2, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2.
– Décrire le mouvement de la masse lorsque l'amortissement est faible.
– Décrire le mouvement de la masse lorsque l'amortissement est fort.
– Sur la masse est accroché un stylet dont les mouvements sont enregistrés au cours du temps. Si l'on souhaite que l'enregistrement donne une image relativement correcte des mouvements du bâti dans quelles conditions faut il se placer ? On pourra discuter des rôles de la masse M et de la raideur du ressort en particulier. Donner un exemple d'appareil scientifique d'enregistrement de tels mouvement.

6 Un objet historique et fondamental : le pendule

6.1 Expérience historique initiale

En cinq parties claires et distinctes avec schémas et équations, expliquer en deux pages l'expérience du pendule de Galilée. Les 5 parties seront : 1) une présentation historique du dispositif 2) des observations faites par Galilée 3) une partie d'interprétation (avec des calculs) mettant en évidence toutes les hypothèses permettant de mener à bien les calculs 4) puis une partie d'analyse dimensionnelle critique en particulier sur l'hypothèse de linéarité, et enfin 5)une conclusion qui mettra en évidence une analyse critique sur les période historiques où ont vécus Newton et Galilée.

6.2 Expérience en mouvement

On considère un pendule composé d'un fil inextensible et sans torsion d'une longueur L_0 et d'une masse ponctuelle M. L'extrémité du fil est accroché au plafond d'un wagon d'un train. A l'instant initial, le pendule est vertical, sans mouvement par rapport au wagon et le train est à l'arrêt par rapport au sol. Le train accélère sur une ligne droite avec une accélération constante de valeur absolue a_0. Le référentiel terrestre est considéré ici comme galiléen.

1. Faire un schéma de l'expérience en notant les axes et les quantités dont on aura besoin.
2. Donner l'équation différentielle que vérifie l'angle α entre la verticale au wagon et le fil du pendule, dans le référentiel du wagon.
3. en $t = t_1$, le train arrête d'accélérer et possède alors un mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre. Etablir l'équation différentielle que vérifie l'angle α.
4. Résoudre cette équation.
5. Exprimer la fréquence de pulsation du pendule f_0 en fonction des données de l'énoncé.
6. Faire l'application numérique pour $L_0 = 25\,cm$, $a_0 = 4\,ms^{-2}$, $M = 1\,kg$, $t_1 = 1'17"$.
7. Quel est le type de train utilisé pour l'expérience ? Il est propulsé par des moteurs électriques. Sont-ce des moteurs synchrones, asynchrones, à courant continu ? Justifier votre réponse.
8. En argumentant, grâce aux réponses précédentes, expliquer en quoi un simple pendule peut-être un capteur d'accélération (accéléromètre). Est il possible de l'utiliser comme "détecteur" de référentiel galiléen ?

6.3 Un autre expérience historique : le pendule de Foucault

En cinq parties claires et distinctes avec schémas et équations, expliquer en deux pages l'expérience du pendule de Foucault. Les 5 parties seront : 1)une présentation historique du dispositif 2) partie comprenant les observations attendues et faites 3) une partie d'interprétation (avec quelques calculs) 4) puis une partie d'analyse critique (dimensionnement de l'expérience, difficulté des conditions initiales, etc.), et enfin 5) une conclusion qui mettra en évidence ce que montre cette expérience.

7 Dissipation non linéaire

7.1 Frottement solide

Dans le cas quasi statique, on modélise le frottement mécanique entre deux pièces solides à l'aide un coefficient noté f_S positif, adimensionné et reliant les composantes normale $\overrightarrow{N_{2/1}}$ et tangentielle $\overrightarrow{T_{2/1}}$ de la réaction de la pièce 2 sur la pièce 1 comme indiqué sur la figure 2.

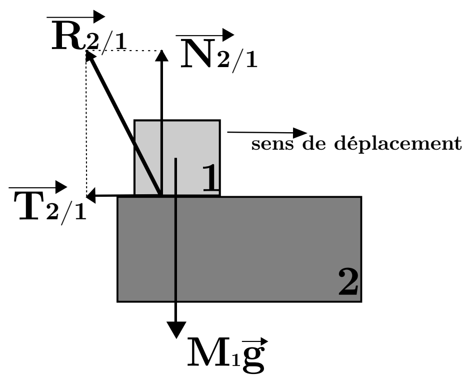

FIGURE 2 – *Représentation des réactions entre deux pièces solides*

Lorsque la pièce 1 se déplace en glissant sur la pièce 2, alors la réaction tangentielle $\overrightarrow{T_{2/1}}$ est oposée au sens du mouvement et sa norme vérifie :

$$||\overrightarrow{T_{2/1}}|| = f_S.||\overrightarrow{N_{2/1}}||$$

Lorsque la pièce 1 ne glisse pas sur la pièce 2, alors

$$||\overrightarrow{T_{2/1}}|| \leq f_S.||\overrightarrow{N_{2/1}}||$$

Si l'on appuie sur la pièce 1 avec une force extérieure $\overrightarrow{F_e}$, faisant un angle θ_e avec la verticale, quelle inégalité doit respecter θ_e pour que la pièce 1 puisse glisser sur la pièce 2. Expliquer le principe de l'arc-boutement.

7.2 Amortissement d'un oscillateur mécanique

On considère une masse M attachée à un ressort de raideur k, pouvant se déplacer horizontalement sur un plan métallique. La masse glisse sur le plan avec un frottement solide, caractérisé par un coefficient f_S. Initialement on écarte la masse de sa position d'équilibre l_0 d'une distance u_0 et on la laisse évoluer sans lui transmettre de vitesse initiale.

- Faire un schéma annoté de l'expérience, en orientant les axes de déplacements
- On suppose u_0 positif. Donner la condition sur u_0 pour que le mouvement ait lieu.
- Schématiser, sans faire de calcul le déplacement $u(t)$ de la masse par rapport à sa position d'équilibre. On s'appliquera à bien mettre en évidence ce qui se passe au moment où la vitesse s'annule.
- Etablir l'équation différentielle que doit vérifier $u(t)$. Quelle condition doit vérifier $\dot{u}(t)$ pour que cette équation soit valable ?

– Résoudre cette équation avec les conditions initiales de l'expérience et donner le temps t_1 à partir duquel la solution n'est plus valable.
– Après le temps t_1, établir l'équation différentielle que doit vérifier $u(t)$. La résoudre et donner le temps t_2 à partir duquel la solution n'est plus valable.
– Que se passe -t-il après le temps t_2 ?
– Représenter proprement $u(t)$.
– Représenter la trajectoire de cet oscillateur dans le diagramme des phases ($\dot{u}$ en fonction de u)
– Ce système mécanique est il conservatif ? Expliquer à quel niveau peut être dissipée l'énergie de l'oscillateur.
– Peut on parler période d'oscillation ? (On s'attachera à calculer t_n-t_{n-1} où n est le numéro de l'occurrence de l'annulation de $\dot{u}$). Le mouvement est il rigoureusement périodique ?
– Proposer un protocole expérimental permettant d'estimer la valeur de f_S.

7.3 Amortissement d'un oscillateur électrique

Une diode est un dipôle non linéaire dont la caractéristique tension-courant est représentée sur la figure 3. La caractéristique réelle peut se modéliser sous la forme suivante :

$$I = I_s \exp\left(\frac{U}{\beta}\right)$$

avec β et I_s des constantes dépendant de la diode.
Cette caractéristique très abrupte est souvent modélisée par un comportement idéal qui suppose la diode bloquée

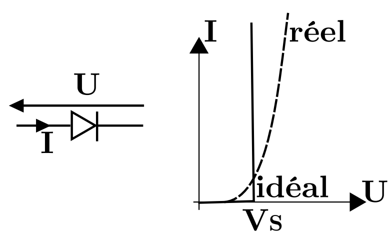

FIGURE 3 – *Caractéristique électrique de la diode (en pointillé, la caractéristique réelle, en plein la caractéristique idéale)*

($I = 0$) quand la tension à ses bornes est inférieure à la tension de seuil V_S et un courant quelconque positif quand $U = V_S$. La valeur de $V_S \sim 0,6V$ pour toutes les diodes.
On considère le circuit présenté sur la figure 4 composé d'un circuit L, C refermé par un pont de diodes (tête-bêche). Ce circuit est abandonné librement à lui même à l'instant initial $t = 0$, avec la capacité chargée à une valeur de tension

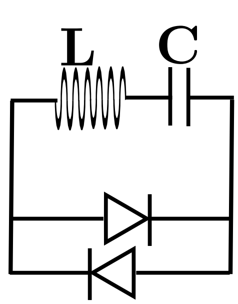

FIGURE 4 – *Circuit oscillant avec amortissement non-linéaire*

U_C^0, le schéma ne fait pas apparaître le dispositif d'interrupteurs et de source de tension permettant ce basculement.

– Expliquer qualitativement comment vont se comporter le courant I dans le circuit et la tension u_c aux bi-ornes de la capacité.
– En supposant la charge initiale de la capacité suffisamment grande pour débloquer une diode ($|U_C^0|$), établir l'équation différentielle que doivent vérifier $I(t)$ et $U_c(t)$.
– Trouver une analogie avec le problème de mécanique précédent et répondre aux mêmes questions.
– Tracer la variation de la tension aux bornes de l'ensemble du circuit.
– Proposer une modification du circuit permettant d'utiliser cette tension comme un signal d'horloge numérique (valeurs discrètes).

8 Utilisation d'un filtre en électronique

8.1 Décomposition spectrale du signal d'entrée

On considère un courant périodique de type "rectangle", de période T_0, comme représenté sur la figure 5. On

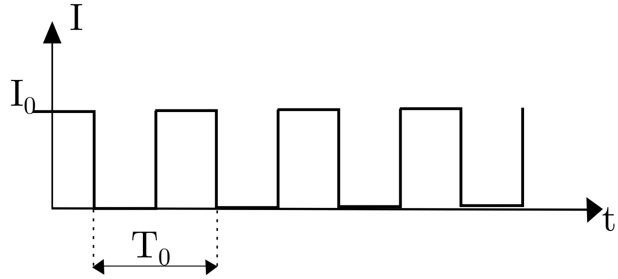

FIGURE 5 – *Signal d'entrée d'un filtre*

rappelle que toute fonction φ périodique, de période T peut s'écrire comme une série infinie appelée série de Fourier, sous la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp\left[j\frac{2\pi}{T}nt\right]$$

Les coefficients c_n sont les coefficients complexes de la série de Fourier, ils correspondent à l'amplitude complexe de l'harmonique n, de fréquence n/T. Ces coefficients sont donnés par la relation :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\exp\left[-j\frac{2\pi}{T}nt\right]dt$$

– Pour un signal périodique de forme quelconque, que représente le terme d'ordre 0 ? Comment peut on faire pour la supprimer ?
– Exprimer les coefficients c_n du signal présenté sur la figure 5 en fonction de n, T, et I_0.
– Quel est le rapport d'amplitude entre l'harmonique n et l'harmonique 1 ?
– A partir de quelle harmonique n_2 l' amplitude est au moins deux fois plus petite que l'harmonique 1 ? Même question (n_10) pour un rapport de 10 ? Donner une évaluation de l'ordre auquel on peut tronquer la série ?

8.2 Action d'un filtre

– Le courant "rectangle" est utilisé comme excitation du circuit bouchon du premier exercice. Faire un schéma du montage.

- Exprimer la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$, où $\underline{U}$ désigne la tension aux bornes du circuit bouchon. On fera apparaître le facteur de qualité Q du circuit.
- Exprimer le module de l'amplitude u_n correspondant à l'harmonique n de la tension de sortie U en fonction de n.
- On suppose le facteur de qualité $Q \sim 10^3$. Calculer la bande passante à - 3 décibels de ce filtre. A quoi correspond elle en terme d'amplitude puis en terme de puissance transmise ?
- Calculer l'atténuation en décibel pour les harmoniques n_2 et n_10. A quoi cela correspond il en amplitude, en puissance. Commenter.
- Proposer un protocole pour supprimer des harmoniques particulières dans un signal.