

Quelques éléments sur le rayonnement stellaire

1 Rappels de cours et culture générale

1.1 Quelques définitions importantes :

- La luminosité d'une étoile est la puissance totale qu'elle rayonne (unité : Watt).
- On parle d'éclat lorsqu'il s'agit de la lumière reçue par unité de surface, de densité de flux ou de flux monochromatique lorsqu'il s'agit d'un éclat par unité de longueur d'onde ou de fréquence.
- La magnitude est reliée à l'éclat par : $m = -2.5 \log(\text{éclat} / \text{éclat de référence})$. Il s'agit en général de magnitude dans un domaine de longueur d'onde donné, dans le cas contraire on parle de magnitude bolométrique. La magnitude absolue (M) est la magnitude qu'aurait une étoile placée à la distance de référence $d_o=10$ pc. On a donc la définition : $m - M = 5 \log D - 5$ où D est exprimé en pc. Cette relation est appelée "module de distance".

1.2 Quelques lois :

- Les étoiles sont en général, en première approximation, assimilées à des corps noirs rayonnant dans toutes les directions. La loi de Planck d'émission d'un corps noir donne la luminosité monochromatique par unité de surface et de longueur d'onde :

$$I_T(\lambda) = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{k_B\lambda T}\right) - 1}$$

de cette loi générale, on déduit deux lois très simples et très utiles :

- La loi de Wien : $\lambda_{max} \cdot T = \text{constante}$ (numériquement, la constante vaut, dans les unités S.I. $2,89 \cdot 10^{-3}$ K.m),
- La loi de Stéfán donne la puissance bolométrique par unité de surface : $P = \sigma T^4$ ($\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻²K⁻⁴).

1.3 Et un diagramme :

- le diagramme de Hertzsprung-Russel permet de classer les étoiles en fonction de leur couleur et de leur luminosité et donne ainsi une représentation statistique de l'évolution temporelle d'une étoile durant sa vie.

2 Des étoiles de toutes les couleurs...

1. Quelles sont physiquement les "couleurs chaudes" du spectre visible d'après vous ? Commenter.
2. Votre stylo bleu est-il plus chaud que votre stylo rouge ? Pourquoi ?
3. Quelle est la couleur visible du soleil ? Quelle est la longueur d'onde correspondante ? En déduire une valeur approchée de sa température de surface par la loi de Wien.
4. La géante rouge Bételgeuse est-elle plus chaude ou plus froide que le soleil ? estimer sa température. Même question pour l'étoile "bleue" Régulus.
5. En supposant que le soleil est une sphère de rayon $R_s \sim 700000$ km, estimer sa température de surface par la loi de Stefan-Boltzmann.
6. Commenter les différences d'estimation

3 Le spectre optique d'émission du soleil

Dans la pratique une donnée expérimentale fondamentale est le spectre d'une étoile dans la lumière visible, obtenu par un dispositif dispersif (spectromètre à réseau très fin). On obtient ainsi un spectre analogue à celui montré en exemple sur la figure ??

1. Expliquer pourquoi, alors que le soleil a un rayonnement de type corps noir (continu en longueur d'onde), on observe des raies discrètes. Quelles informations peut on en tirer ?
2. L'hydrogène, par sa simplicité structurale et son abondance dans l'Univers, a été historiquement beaucoup étudié. Ses raies d'émission ont été classées en séries synthétisées dans le tableau 2.

Nom de la série	Transitions	Nomenclature traditionnelle
Lyman	$n \geq 2 \rightarrow n = 1$	$Ly_\alpha, Ly_\beta, Ly_\gamma, \dots$
Balmer	$n \geq 3 \rightarrow n = 2$	$H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$
Ritz-Paschen	$n \geq 4 \rightarrow n = 3$	—
Brackett	$n \geq 5 \rightarrow n = 4$	—
Pfund	$n \geq 6 \rightarrow n = 5$	—
Humphreys	$n \geq 7 \rightarrow n = 5$	—

TABLE 1 – Nomenclature des séries des raies de l'Hydrogène

Pour chacune de ses raies, calculer la longueur d'onde du rayonnement associée à la transition de plus faible énergie ($n = n_0 + 1 \rightarrow n = n_0$) et celle de plus grande énergie ($n = \infty \rightarrow n = n_0$).

3. Quelles sont les transitions dans le domaine visible ?

4 Isotopie et spectrométrie

La raie de Balmer H_β du spectre de l'atome d'hydrogène possède la longueur d'onde $\lambda_{H\beta} = 486,133$ nm. Il a été découvert une raie voisine très proche d'une longueur d'onde $\lambda_{D\beta} = 4859,975$ nm de très faible intensité relative par rapport à celle de $\lambda_{H\beta}$. L'interprétation de ce phénomène consiste à attribuer la présence de la raie $\lambda_{D\beta}$ à l'existence du deutérium, isotope naturel de l'hydrogène et de noyau plus lourd (il comporte un neutron supplémentaire). L'interprétation semi-classique, basée sur le modèle atomique de Bohr attribue ce décalage de longueur d'onde au fait que le système électron-noyau constitue un problème à deux corps : l'électron et le noyau se déplacent autour d'un point appelé centre de masse, qui n'est pas confondu avec le centre du noyau.

1. Reprenant le modèle de Bohr, appliquer le principe fondamental de la dynamique, à l'électron de masse m_e au noyau de masse M_n et montrer que le vecteur \vec{r}_{en} joignant le noyau à l'électron vérifie une équation du type :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}_{en}}{dt^2} = \vec{F}$$

2. Déterminer le rapport des masses du noyau de deutérium et du proton à l'aide des données des mesures expérimentales.

Quelques formes de puits et de marche de potentiel pour l'équation de Schrödinger

5 Puits infini

On considère un puits de potentiel unidimensionnel selon l'axe x , centré en $x = 0$, de largeur $x = 2a$. Dans la zone $-a < x < a$ l'énergie potentielle V est nulle. A l'extérieur de cette zone, cette énergie est considérée comme infini. On considère une particule de masse m dans ce puits.

1. Faire un schéma du puits.
2. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire.
3. La résoudre.
4. En déduire la forme mathématiques des états énergétiques accessibles à la particule.
5. On considère une particule possédant une énergie comprise entre $E_0 = 0$ et $E_2 = 4\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Ecrire la fonction d'onde associée comme une somme d'ondes planes. Tracer la densité de probabilité de présence de la particule dans le puits en fonction de la position.

6 1/2 Puits infini

On considère maintenant un puits dissymétrique, de largeur b . Pour les $x < 0$, la valeur du potentiel est infinie, pour $0 < x < b$, le potentiel est nul, puis pour $x > b$, le potentiel vaut V_0 . On cherche les états accessibles à une particule de masse m d'énergie $E < V_0$, dans la partie $x > 0$. Mêmes questions que pour le puits infini.

7 Boîte de confinement

On considère une particule massive de masse m , confinée par un potentiel donné en volume. Ce potentiel est infini à l'extérieur d'une boîte parallélépipédique rectangle de longueur a (sur l'axe x), de largeur b (sur l'axe y) et de hauteur c (sur l'axe z).

1. Faire un schéma du puits.
2. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire.
3. La résoudre en faisant l'hypothèse de séparation des variables.

8 Effet tunnel

8.1 Principe

On considère une marche de potentiel, de hauteur V_0 , située en $x = 0$: $x < 0, V = 0, x > 0, V = V_0$. Une particule massive de masse m arrive de l'espace des $x < 0$, avec une énergie $E < V_0$.

1. Faire un schéma du profil du potentiel.
2. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans les 2 zones de l'espace.
3. La résoudre dans ces 2 zones, puis associer les 2 solutions obtenues par des considérations de continuité. Discuter ces conditions de continuités.
4. Tracer la densité de probabilité de présence de la particule en fonction de x .

8.2 Situation mono-dimensionnelle réaliste

On considère un pic de potentiel, de hauteur V_0 , centré en $x = 0$ et de largeur $2a$ $x < -a, V = 0, x > a, V = 0$ et $-a < x < +a, V = V_0$. Une particule massive de masse m "arrive" de l'espace des $x < 0$, avec une énergie $E < V_0$.

1. Faire un schéma du profil du potentiel.
2. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire dans les 3 zones de l'espace.
3. La résoudre dans ces 3 zones, puis associer les 3 solutions obtenues par des considérations de continuité. Discuter ces conditions de continuités.
4. Montrer que le coefficient de transmission sur la zone 3 est donnée par la relation :

$$t_3 = \frac{4j\gamma\gamma_0}{(\gamma + j\gamma_0)^2 \exp(2\gamma_0 a) - (\gamma - j\gamma_0)^2 \exp(-2\gamma_0 a)} \exp(-2j\gamma a)$$

$$\text{où } \gamma = \frac{(2mE)^{1/2}}{\hbar} \text{ et } \gamma_0 = \frac{(2m(V_0 - E))^{1/2}}{\hbar}$$

5. Tracer la densité de probabilité de présence de la particule en fonction de x .
6. Discuter numériquement de la probabilité de passage pour une particule thermique ($T \sim 300K$)

Modèle simplifié de l'atome d'Hydrogène

On essaie dans cet énoncé de retrouver la distribution des niveaux d'énergie de l'atome d'Hydrogène à partir de l'équation de Schrödinger stationnaire. C'est à dire qu'on ne fait pas l'hypothèse de Bohr d'un électron sur une trajectoire circulaire, et que l'on considère réellement l'aspect ondulatoire de l'électron. Cependant afin d'alléger un petit peu les expressions mathématiques, nous allons considérer que la fonction d'onde $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ de l'électron autour du noyau peut s'écrire :

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \varphi(r) \exp(-j\omega t)$$

C'est à dire que seule la distance r au centre du noyau intervient. On fait donc l'hypothèse que la configuration est invariante par rotation autour des angles θ et ϕ . On rappelle le Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\nabla^2 g(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

I. Etablissement de l'équation

1. Faire un schéma pour rappeler les coordonnées sphériques.
2. Rappeler le potentiel Newtonien auquel est soumis l'électron dans l'atome d'Hydrogène.
3. Ecrire l'équation de Schrödinger en utilisant les hypothèses de non dépendance en θ et ϕ .

II. Adimensionnement de l'équation

Afin d'alléger un peu les notations mathématiques, en Physique, il est judicieux d'adimensionner les systèmes d'équations par des quantités de même échelle que celle que l'on trouve dans la configuration étudiée. On pose habituellement les constantes suivantes :

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}, \text{ Rayon de Bohr; } \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}, \text{ structure fine; } R_H = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}, \text{ Rydberg}$$

1. Avec votre calculatrice calculer les constantes précédentes.
2. On cherche la solution de l'équation de Schrödinger sous la forme $\varphi(r) = f(u)$, avec $u = \frac{r}{r_0}$. Montrer, par ce changement de variable que l'équation que vérifie f est alors :

$$\frac{1}{u} \frac{d^2}{du^2} (uf(u)) + 2 \frac{f(u)}{u} = \frac{E}{R_H} f(u)$$

On pose souvent $\epsilon = \frac{E}{R_H}$

III. Résolution de l'équation

Nous cherchons les solutions de l'équation stationnaire sous la forme

$$f(u) = \exp(j\gamma u) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p u^p$$

Cette façon de faire est assez générale, quand on n'a pas d'idée sur la forme de la solution, on la cherche sous forme de polynôme et on écrit ainsi les conditions que doivent vérifier les coefficients du polynôme.

1. En faisant attention, et en prenant son temps, montrer alors que les coefficients a_p vérifient la relation suivante :

$$\sum_p (\gamma^2 a_p u^p + (-2j\gamma(p+1) + 2) a_p u^{p-1} - p(p+1) a_p u^{p-2} - \epsilon a_p u^p) = 0$$

2. Quelle relation existe - t - il donc entre a_p, a_{p+1}, a_{p+2} ?
3. Par une analyse en ordre de grandeur sur la série des a_p , montrer alors que nécessairement, il existe un ordre p_0 à partir duquel les coefficients a_p sont tous nuls.

4. En déduire qu'alors, il est nécessaire d'avoir les deux conditions suivantes :

$$\gamma^2 = \epsilon \text{ et } j\gamma = \frac{1}{n} \text{ avec } n \text{ entier.}$$

5. Montrer alors que l'on retrouve la formulation de Rydberg.

IV. Pour aller un peu plus loin

La résolution dans le cas général se fait selon la même philosophie. On suppose la séparation des variables r, θ, ϕ et l'on utilise le Laplacien complet. Ce faisant apparaissent deux autres nombres entiers quantiques notés l et m , associés à θ et ϕ , appelés historiquement nombres quantiques secondaires. Physiquement, l est lié à la quantification du module du moment cinétique et m à sa projection sur l'axe z . Ces trois nombres quantiques ont des variations liées. Finalement on arrive à la fonction d'onde suivante pour le triplet n, l, m :

$$\Psi_{n,l,m}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \exp\left(-\frac{r}{nr_0}\right) \left(\frac{r}{r_0}\right)^l Y_l^m(\theta, \phi) La_{n-l-1}\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

où Y_l^m est l'harmonique sphérique d'ordre l et de rang m (fonction parfaitement connue), La_{n-l-1} est le polynôme de Laguerre d'ordre $n-l-1$.

Les règles de variations pour les entiers sont les suivantes :

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad 0 \leq l \leq (n-1); \quad -l \leq m \leq l$$

Il faut bien comprendre que l'aspect apparemment difficile de cette fonction d'onde provient de la géométrie sphérique. Les harmoniques sphériques et les polynômes de Laguerre apparaissent dans les géométries sphériques lorsqu'il y a un Laplacien, exactement de la même manière que les fonctions trigonométriques apparaissent dans les géométries cartésiennes.

1. Combien y a-t-il de fonctions d'ondes possibles pour un niveau d'énergie n donné.
2. On appelle ce nombre de possibilité la dégénérescence du niveau. Que vaut cette dégénérescence pour $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$?
3. Cette suite de valeur vous rappelle-t-elle une règle de remplissage connue en chimie ?
4. A votre avis manque-t-il un nombre quantique à la description pour parfaire celle-ci ?
5. Existe-t-il des expériences historiques qui permettent de mettre cette lacune en évidence ?
6. Comment appelle-t-on les zones spatiales dans lesquelles $|\Psi|^2$ est important ?

Physique Quantique L3 - Contrôle 1 - 2012-2013

Remarque importante : L'usage de tout appareil électronique est interdit. Le temps de l'épreuve est de 2h. Il est conseillé de lire attentivement tout l'énoncé avant de commencer à rédiger.

9 Question de cours et de culture générale

9.1 Quelques quantités importantes :

Donner la valeur (à défaut l'ordre de grandeur) et l'unité dans le système international des quantités physiques suivantes :

1. c vitesse de la lumière dans le vide
2. \mathcal{R} constante des gaz parfaits
3. \mathcal{N} nombre d'Avogadro
4. k_B constante de Boltzman
5. ϵ_0 permittivité diélectrique du vide
6. \mathcal{G} constante de gravitation universelle
7. m_e masse de l'électron
8. m_p masse du proton
9. e charge électrique élémentaire
10. R_H constante de Rydberg
11. α_0 constante de structure fine
12. t_H âge de l'Univers
13. t_P temps de Planck
14. R_T rayon de la Terre
15. D_s ordre de grandeur de la taille du système solaire

9.2 Expérience historique

Décrire le protocole schématisé de l'expérience exhibant l'effet photo-électrique. Décrire les résultats expérimentaux observés. Donner l'interprétation historique. Décrire un procédé qui permet de **mesurer** le rapport h/e .

9.3 Réflexion sur quelques ordres de grandeurs

1. Rappeler la valeur de E_0 , énergie de première ionisation de l'Hydrogène.
2. On considère une mole d'Hydrogène simple (H) gazeux. Rappeler l'ordre de grandeur du volume qu'occupe ce système à la température et la pression standard de l'atmosphère ($T \sim 300\text{K}$ et $P \sim 10^5 \text{ Pa}$) si l'on considère qu'il se comporte comme un gaz parfait. Donner alors un ordre de grandeur qu'occuperait un atome de H dans ces conditions.
3. Exprimer l'ordre de grandeur de l'énergie E_i , qu'il faudrait fournir à ce système pour l'ioniser complètement, en fonction de E_0 et \mathcal{N} . En donner l'ordre de grandeur. Comparer E_i à une quantité d'énergie macroscopique quotidienne (chauffage, réfrigérateur, fabrication de glaçons, ...). Conclure

10 Spectrométrie

10.1 Quelques rappels sur le corps noir et son utilisation

On rappelle l'expression de la densité spectrale d'énergie interne d'un corps noir (quantité d'énergie interne par unité de volume et de fréquence) donnée par la relation Planck :

$$u_\nu(T, \nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{k_B T}) - 1}$$

1. Rappeler la relation entre la longueur d'onde et la fréquence.
2. **Montrer** que l'expression de la relation de Planck peut se donner en fonction de la longueur d'onde λ sous la forme :

$$u_\lambda(T, \lambda) = \frac{K\lambda^{-5}}{\exp(\frac{hc}{\lambda k_B T}) - 1}$$

où K est une constante que l'on exprimera.

3. Représenter graphiquement de façon schématique $u_\lambda(T, \lambda)$ en fonction de λ pour deux températures différentes. Y a-t-il un point particulier sur cette courbe.
4. Démontrer sommairement (une explication de la méthode sera suffisante) la loi de Wien et l'énoncer.
5. En donnant un exemple simple, expliquer comment on peut utiliser cette loi pour déterminer la température d'un corps inaccessible (une étoile par exemple, ou un autre corps chauffé).

10.2 Quelques raies de quelques éléments

10.2.1 l'Hydrogène

On rappelle que les niveaux d'énergie E_n de l'électron dans l'atome d'Hydrogène sont décrits par la relation :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \text{ avec } E_0 \sim 14 \text{ eV}$$

L'hydrogène, par sa simplicité structurale et son abondance dans l'Univers, a été historiquement beaucoup étudié. Ses raies d'émission ont été classées en séries synthétisées dans le tableau 2.

Nom de la série	Transitions	Nomenclature traditionnelle
Lyman	$n \geq 2 \rightarrow n = 1$	$Ly_\alpha, Ly_\beta, Ly_\gamma, \dots$
Balmer	$n \geq 3 \rightarrow n = 2$	$H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$
Ritz-Paschen	$n \geq 4 \rightarrow n = 3$	—
Brackett	$n \geq 5 \rightarrow n = 4$	—
Pfund	$n \geq 6 \rightarrow n = 5$	—
Humphreys	$n \geq 7 \rightarrow n = 5$	—

TABLE 2 – Nomenclature des séries des raies de l'Hydrogène

1. Etablir les expressions des longueurs d'onde minimales et maximales pour les deux séries Balmer et Lyman en fonction de E_0, h, c .
2. Donner une évaluation numérique de ces quatre longueurs d'onde.
3. Quelle série se retrouve dans le domaine visible ?
4. De quelle couleur apparaissent les nuages d'Hydrogène ?

10.2.2 Le Sodium

L'énergie de première ionisation du sodium est $E_1 \sim 6$ eV. Son spectre d'émission possède un doublet (2 raies d'émission très proches en longueur d'onde) dans le visible aux longueurs d'onde $\lambda_1 = 5890$ nm et $\lambda_2 = 5896$ nm. Les intensités de ces deux raies sont quasiment identiques. On appelle $\delta\lambda$ la différence $\lambda_2 - \lambda_1$.

1. Exprimer la différence d'énergie δE_D de rayonnement correspondant à la différence entre ces deux longueurs d'onde du doublet, en fonction de h , c , $\delta\lambda$ et de λ_1 (on supposera que $\lambda_1\lambda_2 \sim \lambda_1^2$). Donner sa valeur numérique avec un chiffre significatif.

On suppose maintenant que l'on peut transposer le modèle du niveau d'énergie de l'électron de l'atome d'Hydrogène à celui du Sodium.

2. Proposer une expression pour l'énergie $E_n(Na)$ du niveau n pour l'atome de sodium en fonction de E_1 et n .
3. En supposant que la différence δE_D est provoquée par une transition d'un niveau n_0 à un niveau $n_0 + 1$, exprimer n_0 en fonction de δE_D et E_1 . Donner une estimation de sa valeur numérique.
4. Sachant que l'atome de Sodium possède 11 électrons répartis sur les 3 premiers niveaux énergétiques lorsqu'il est au repos (2 électrons au niveau $n = 1$, 8 au niveau $n = 2$, et 1 au niveau $n = 3$), la valeur de n_0 trouvée à la question précédente vous semble-t-elle plausible ? Dans quel état se trouverait alors l'atome de Sodium ?
5. Vous connaissez une règle empirique de chimie de remplissage des niveaux d'énergie des couches électroniques. Donner son nom.
6. Par quelques arguments pertinents, expliquer pourquoi l'approche naïve proposée (prendre modèle sur l'atome d'Hydrogène) ne peut pas fonctionner, on pourra illustrer le propos en invoquant le principe d'exclusion de Pauli.

— FIN —

Physique Quantique L3 - Contrôle 2 - 2012 -2013

Remarque importante : L'usage de tout appareil électronique est interdit. Le temps de l'épreuve est de 2h. Il est conseillé de lire attentivement tout l'énoncé avant de commencer à rédiger. Il sera tenu compte du soin porté à la structure de la copie dans la notation. En particulier, il est fortement déconseillé de découper les exercices dans la rédaction. Il sera judicieux de changer de page pour chaque exercice. Un regard critique sur tout résultat démontré sera apprécié et valorisé. Les questions au sein d'un même exercice possèdent un enchaînement logique dont la prise en compte dans la rédaction sera appréciée.

11 Question de cours et de culture générale

11.1 Quelques quantités importantes :

Donner la valeur (à défaut l'ordre de grandeur) et l'unité dans le système international des quantités physiques suivantes :

1. c vitesse de la lumière dans le vide
2. \mathcal{R} constante des gaz parfaits
3. \mathcal{N} nombre d'Avogadro
4. k_B constante de Boltzman
5. ε_0 permittivité diélectrique du vide
6. μ_0 perméabilité magnétique du vide
7. \mathcal{G} constante de gravitation universelle
8. m_e masse de l'électron
9. m_p masse du proton
10. e charge électrique élémentaire
11. R_H constante de Rydberg
12. α_0 constante de structure fine
13. t_H âge de l'Univers
14. t_P temps de Planck
15. R_T rayon de la Terre
16. D_s ordre de grandeur de la taille du système solaire

11.2 Relations d'incertitude

1. Donner la relation d'incertitude (position-impulsion) d'Heisenberg.
2. Donner la relation d'incertitude (énergie-temps) d'Heisenberg.
3. Donner une interprétation claire de ces relations

11.3 Longueur d'onde associée aux particules

1. Donner l'expression de la longueur d'onde, λ_B de de Broglie, associée à une particule de masse m et d'impulsion p .
2. Quelle est la relation entre λ_B et l'incertitude sur la position δx qui apparaît dans la relation d'Heisenberg ?
3. Exprimer la longueur d'onde λ_B , pour une particule libre en fonction de son énergie E .
4. Pour un proton thermique - on peut considérer que son énergie est $E = k_B T$ - exprimer λ_B en fonction de sa masse et de sa température.
5. Faire l'application numérique pour $T \sim 300K$.
6. Donner l'ordre de grandeur de la température qu'il faudrait atteindre pour que λ_B soit de l'ordre du millimètre.
7. Citer le nom d'un Prix Nobel Français qui a travaillé sur le refroidissement quasi-absolu d'atomes.

11.4 Equation de Schrödinger

On considère une fonction d'onde $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$ - décrivant une particule élémentaire de masse m et d'énergie E - de la forme

$$\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \exp(j\omega t)\Phi(\vec{\mathbf{r}}) \text{ avec } \omega = \hbar E$$

1. Donner l'interprétation physique de la quantité $|\Psi|^2$. On insistera sur sa dimension.
2. Donner l'équation de Schrödinger que vérifie $\Psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$, lorsque la particule est dans un potentiel $V(\vec{\mathbf{r}})$.
3. En déduire l'équation de Schrödinger que vérifie $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$.
4. En déduire l'équation que vérifie $\Phi(\vec{\mathbf{r}})$ lorsque le potentiel V est nul (particule libre).
5. On suppose la configuration mono-dimensionnelle selon la coordonnée cartésienne x , c'est à dire que $\Phi(\vec{\mathbf{r}}) = \Phi(x)$. Ecrire l'équation que vérifie alors $\Phi(x)$.
6. Caractériser en quelques mots cette équation.
7. Exprimer la solution générale de cette équation.
8. Quelles sont les valeurs possibles pour l'énergie ?
9. Représenter la fonction $\Psi(x, t_0)$, t_0 étant fixé, en fonction de x . Quelle est la longueur caractéristique Δx de variation de Ψ selon x ?
10. Représenter la fonction $\Psi(x_0, t)$, x_0 étant fixé, en fonction de t . Quelle est la durée caractéristique Δt de variation de Ψ selon t ?
11. Quelle est la relation entre Δx et Δt ?
12. Comment nomme-t-on la quantité $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ en physique ondulatoire ?
13. Quelle est sa relation avec la quantité d'impulsion p de la particule et de sa vitesse v .

11.5 Réflexions sur l'atome d'Hydrogène

1. Rappeler la valeur de E_0 , énergie de première ionisation de l'Hydrogène.
2. Rappeler l'expression de l'énergie E_n du niveau n de l'électron de l'atome d'Hydrogène, en fonction de n et E_0 .
3. Exprimer alors la longueur d'onde λ_B de de Broglie de l'électron en fonction de E_0 , n et m_e .
4. En supposant que l'électron se trouve dans une sphère de rayon λ_B , donner le volume v_H de l'atome d'hydrogène en fonction de E_0 , n , et m_e .

5. Tracer schématiquement l'allure de v_H en fonction de n .
6. A quoi correspond la situation $n \rightarrow +\infty$? Quel est alors le volume v_H ? Cela est-il cohérent (justifier votre réponse : un oui ou un non n'ayant aucun sens sans explications)?
7. Evaluer numériquement $v_H(1)$ pour $n = 1$ et $v_H(10)$ pour $n = 10$. Y a-t-il une grosse différence d'ordre de grandeur?
8. En utilisant la loi des gaz parfaits, exprimer le volume élémentaire v_H^c , "classique", en fonction de la pression et de la température.
9. Tracer schématiquement l'évolution de v_H^c en fonction de la température.
10. Evaluer numériquement v_H^c , pour les deux températures $T_1 \sim 300K$ et $T_2 \sim 500K$, à pression de 1 atmosphère. Pour information on rappelle que le volume molaire d'un gaz parfait est de l'ordre de 20 à 30 litres à température et pression normales.
11. Comparer $v_H(1)$ avec $v_H^c(T_1)$ et $v_H^c(T_2)$.
12. Que mesure réellement chacune de ces deux grandeurs? Est-il vraiment pertinent de les comparer (justifier votre réponse : un oui ou un non n'ayant aucun sens sans explications)? En particulier on pourra s'interroger de façon critique et constructive sur le rôle de la température dans cette comparaison.

12 Exemples de potentiels canoniques

On rappelle l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées cartésiennes que vérifie la fonction d'onde $\Phi(x, y, z)$ associée à une particule de masse m plongée dans un potentiel $V(x, y, z)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi + (V(x) - E)\Phi = 0$$

On rappelle aussi le laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

12.1 Puits de potentiel infini en une dimension

On considère une particule de masse m dans un puits de potentiel infini comme figuré sur la figure 12.1. Cette particule ne peut pas franchir les barrières de potentiel de chaque côté du puits. Le potentiel est nul entre

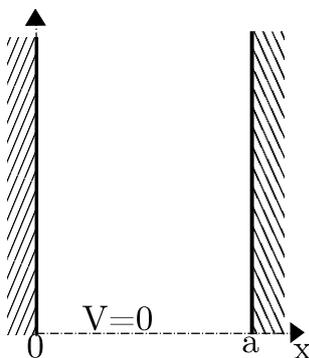


FIGURE 1 – Puits de potentiel infini de largeur a

$x = 0$ et $x = a$, et est infini à l'extérieur de cette bande. On suppose bien évidemment que la fonction d'onde Φ décrivant l'état de la particule ne dépend que de x .

1. Comment doit être $\Phi(x)$ pour $x < 0$ et $x > a$?
2. En utilisant l'équation de Schrödinger en une dimension, établir l'équation différentielle que doit vérifier $\Phi(x)$ dans la zone où le potentiel est nul ($0 < x < a$)
3. Caractériser en quelques mots pertinents cette équation.
4. Donner la forme générale de la solution en fonction de $\gamma_E = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
5. Quelle condition doit respecter $\Phi(x=0)$ et $\Phi(x=a)$. Comment appelle-t-on cette condition ?
6. En déduire que le nombre d'onde γ_E ne peut prendre que des valeurs discrètes, indexées par un entier n .
7. Exprimer le nombre d'onde $\gamma_E(n)$ du mode n en fonction de a et n .
8. En déduire l'expression de l'énergie $E(n)$ du mode n en fonction de a, m, n .

Considérons maintenant un atome d'Hydrogène comme une particule élémentaire de masse m_p , bloqué dans un puits de potentiel infini. On considère cet atome comme énergiquement activé par la température ($E \sim k_B T$).

9. Exprimer alors a en fonction de n, T et m_p .
10. Evaluer numériquement a pour l'état fondamental de l'atome dans le puits ($n=1$) pour $T \sim 300K$, puis pour $T \sim 3K$ (température de l'Hélium liquide).
11. Evaluer numériquement la température T_1 nécessaire pour obtenir $a \sim 1\mu m$?
12. Evaluer numériquement la température T_2 nécessaire pour obtenir $a \sim 1mm$?
13. Quels peuvent être les intérêts métrologiques à refroidir très fortement des atomes dans un espace confiné de taille connue ?
14. Par quels procédés physiques peut-on refroidir des atomes à ces échelles de température ?
15. Connaissez-vous une expérience de ce genre ?

12.2 Boîte de potentiel infini en trois dimensions

On considère maintenant que la particule est piégée dans une boîte parallélépipédique de potentiel en trois dimensions. Le potentiel $V(x, y, z)$ est nul pour $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$ et infini partout ailleurs. La particule est donc contrainte à rester dans cette boîte de volume abc . On suppose que la fonction d'onde $\Phi(x, y, z)$ décrivant l'état de la particule peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de variables séparées, soit :

$$\Phi(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$$

1. Etablir l'équation différentielle qui relie les trois fonctions $F(x), G(y), H(z)$ et leur dérivée seconde.
2. En divisant cette équation par le produit $F(x)G(y)H(z)$, montrer que chacune de ces trois fonctions vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant de la forme :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha_E f = 0$$

où l'on exprimera la constante α_E pour chacune des trois fonctions F, G et H .

3. Ecrire les conditions de continuité en $x=0$ et $x=a$ pour F .
4. Ecrire les conditions de continuité en $y=0$ et $y=b$ pour G .
5. Ecrire les conditions de continuité en $z=0$ et $z=c$ pour H .

6. En déduire que α_E ne peut prendre que des valeurs discrètes dans chacune des directions.
7. En déduire alors l'expression générale de l'énergie $E(n, m, q)$ du mode n (sur x), m (sur y), q (sur z).
8. Exprimer la forme de la fonction $\Phi(x, y, z)$ en fonction de a, b, c et x, y, z .
9. Quel est le lien entre la configuration tridimensionnelle et la configuration à une dimension ?
10. Dans le cas d'un boîte cubique ($b = c = a$), exprimer la différence entre les énergies $E(0, 0, 1)$, $E(0, 1, 0)$ et $E(1, 0, 0)$.
11. Considérant que l'énergie est la valeur propre associée à un opérateur linéaire, quel qualificatif peut on lui donner alors ? (On pensera à une valeur propre de matrice qui correspond à plusieurs vecteurs propres).
12. Quels principes physiques peut on utiliser pour bloquer une particule dans une telle boîte ?

— FIN —