Contrôle Ondes et Vibration

La durée de l'épreuve est de 3h00. L'utilisation de documents est interdite. La calculatrice est autorisée mais pas le téléphone portable. Toute remarque pertinente complémentaire à la question sera la bienvenue. En particulier on prendra soin de donner des ordres de grandeurs chiffrés chaque fois que c'est possible ainsi que des points de vue critiques sur les réponses produites

Partie a: Quelques généralités sur les phénomènes vibratoires et ondulatoires

I. Des définitions et des exemples

I.1. En une page maximum, vous expliquerez ce qu'est une onde. Vous utiliserez des schémas, donnerez des équations typiques ainsi que des exemples et des ordres de grandeur.

I.2. Donner d'autres formulations possibles que l'équation de D'Alembert, pour une équation des ondes, en les justifiant.

II. Des ordres de grandeur

II.1. Quelle est la fréquence de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6S\frac{1}{2}$ de l'atome de césium 133 ?

II.2. Que définit légalement cette fréquence ?

II.3. Quelle est la définition légale du mètre ?

II.4. Donner des arguments pertinents qui permettent de qualifier c, la vitesse de la lumière dans le vide, de "constante fondamentale" ?

II.5. Qu'est ce que le graviton ?

II.6. Justifier avec quelques arguments physiques pertinents la possibilité d'existence d'onde de gravitation qui justifierait une telle appellation. Connaissez vous le nom d'une expérience essayant de mettre en évidence ce phénomène ?

III. Une composition libre sur le pendule de Galilée

III.1. En cinq points importants (dispositif étudié, observations historiques, analyse théorique, interprétation des observations grâce à l'analyse théorique et conclusion pertinente et personnelle), exposer librement, à l'aide de schémas et d'équations l'expérience historique du pendule de Galilée. Rédiger dans l'esprit d'un cours pour des élèves de Terminale ou de L1 par exemple sans dépasser deux pages.

IV. Une composition libre sur l'optique ondulatoire

IV.1. En quelques points importants (équations de Maxwell, rôle de la polarisation de l'onde, notion d'interférence, notion de diffraction, rôle particulier de l'intensité en optique et quelques exemples d'expériences historiques) exposer librement, à l'aide de schémas et d'équations l'aspect irréductiblement ondulatoire de la lumière. Rédiger dans l'esprit d'un cours (niveau L2) sans dépasser deux pages.

Partie b: Exemple d'équation de D'Alembert

De façon générale, la dynamique d'un fluide est décrite par les équations de Navier-Stockes, et pour un fluide parfait par l'équation dite d'Euler. Ces équations ne sont pas indispensables pour dériver l'équation de D'ALEMBERT, elle peut s'obtenir à partir de bilan sur une tranche infinitésimale de fluide, en faisant quelques hypothèses. Il est important ici de noter que le fluide peut-être un liquide ou un gaz.

I. Ondes sonores dans un fluide non soumis à la gravité

On suppose que le fluide est le siège de **petites variations** locales de vitesse et de pression, autour de son état d'équilibre. Ce dernier est caractérisé par une pression constante, notée P_0, par une masse volumique Π_0 constante et uniforme et par l'absence de mouvement au sein du fluide (vitesse locale nulle). On se place en fait dans le référentiel où le fluide est globalement au repos. On supposera la configuration mono-dimensionnelle, c'est à dire que les quantités physiques ne varient spatiallement que selon l'abscisse x. La composante selon x de la vitesse locale du fluide sera notée $v(x,t)$, la variation locale de pression sera notée $p(x,t)$ et la variation de masse volumique $\rho(x,t)$. Il est important de remarquer que ces quantités sont algébriques : elles peuvent être positives ou négatives. En particulier une variation $p < 0$ signifiera que la pression locale du fluide est plus petite que P_0 mais reste quand même positive, il en est de même pour ρ. On écrira donc pour la pression locale $P(x,t)$ et la masse volumique locale $\Pi(x,t)$:

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \text{ et } \Pi(x,t) = \Pi_0 + \rho(x,t)$$

Enfin, comme l'on considère des petites variations autour de la position d'équilibre, cela revient à considérer que l'influence de la force de gravité n'intervient que dans les quantités P_0 et Π_0. Ceci amène à nouveau à dire **improprement** que l'on néglige les forces de gravité. Cette hypothèse est réaliste pour les fluides légers (les gaz) et pour les liquides pourvu que l'on n'étudie pas la propagation des ondes sur des grandes profondeurs.

I.1. Généralités

I.1. 1. Rappeler proprement la définition d'une pression, à l'aide d'un schéma.

I.1. 2. De façon générale, il existe une relation, appelé équation d'état du fluide, reliant la masse volumique Π à sa pression P. On appelle coefficient de compressibilité la quantité χ définie par le rapport relatif des variations de Π et P lors d'une transformation. Ce coefficient peut être isochore (volume constant), isotherme (température constante), ou isentropique (entropie constante, le système élémentaire étudié n'échange pas de chaleur avec l'extérieur). Il est noté alors :

$$\chi_\alpha = \frac{1}{\Pi}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial P}\right)_\alpha \text{ où } \alpha \text{ désigne la quantité restée constante : } V, T \text{ ou } S$$

1. Application : exprimer χ_S et χ_T pour un gaz parfait en fonction de la température et de la pression. En donner une estimation numérique.
2. Pour l'eau, la différence entre χ_T et χ_S vous semble -t-elle importante ? Pourquoi ?

3. De façon générale, on ne connait pas fonction d'état (penser à l'eau par exemple). A l'aide des hypothèses sur le fluide relier $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ à $\dfrac{\partial p}{\partial t}$

I.2. Conservation de la masse

En considérant une tranche infinitésimale de fluide, selon la direction x, de longueur $\mathrm{d}x$, et de surface latérale S_0 dans le plan y, z, trouver l'équation qui relie $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ à $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$. On pourra faire un bilan détaillé sur le volume élémentaire $S_0\mathrm{d}x$ ou utiliser la relation générale de loi de conservation. Dans tous les cas, on linéarisera les équations au variations de premier ordre.

I.3. Principe fondamental de la dynamique

Appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le système $S_0\mathrm{d}x$, trouver la relation entre $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial \rho}{\partial x}$. On pensera à négliger tous les termes qui ne sont pas au bon ordre de grandeur.

I.4. Equation d'évolution de v et p

I.4. 1. En utilisant les relations obtenues aux deux dernières questions, trouver l'équation de D'ALEMBERT que vérifient v et p. A quoi est homogène le produit $p.v$? L'onde est elle transverse ou longitudinale ?

I.4. 2. Retrouver l'expression de la célérité c par analyse dimensionnelle.

I.4. 3. Application numérique : quelle est la vitesse du son dans l'air atmosphérique (on pourra faire les 2 applications avec χ_T et χ_S).

I.5. Généralisation tridimensionnelle

I.5. 1. Comment s'écrivent les équations obtenues en II.2 et II.3 en trois dimensions (on pourra utiliser l'opérateur $\vec{\nabla}$)

I.5. 2. Calculer le rotationnel de la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

I.5. 3. Les ondes transverses sont elles possibles dans un fluide ?

II. Ondes sonores dans un fluide soumis à la gravité

Le fluide est maintenant un fluide dense (par exemple de l'eau) et de profondeur assez importante pour que l'on considère que la gravitation intervient dans la répartition de la pression. Ainsi la pression au repos P_0 dépend maintenant de la profondeur dans le fluide. Au point M de coordonnée z prise à partir de la surface du fluide, comme indiqué sur la figure 1, s'exerce le poids sur un volume infinitésimal de fluide, noté $\mathrm{d}^3\tau$.

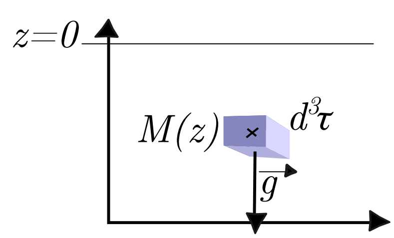

FIGURE 1 – Schéma d'un élément infinitésimal de volume autour d'un point du fluide

II.1. Montrer que la relation fondamentale de l'hydrostatique est vérifiée lorsque le fluide est au repos, soit

$$\vec{\nabla} P_0 = \Pi_0 \vec{\mathbf{g}}$$

II.2. Résoudre cette équation dans le cas simple monodimensionnel, où la pression P_0 ne dépend que de z. La condition à la limite est $P_0(z=0) = P_a$ où P_a est la pression atmosphérique.

II.3. En vous inspirant des questions du paragraphe précédent, montrer que

$$\Pi_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P$$

II.4. En déduire l'équation de d'Alembert dans ce milieu.

II.5. Une onde se propage dans ce milieu selon l'axe z, quelle est sa relation de dispersion ? **II.6.** Conclure.

Partie c: Réflexions sur la réflexion d'une onde

I. Une seule interface, incidence normale

On considère une quantité physique $\mathcal{O}$ qui se propage dans une zone de l'espace stratifiée, en deux demi espace infini, comme indiqué sur la figure2. La vitesse de propagation de l'onde est c_1 dans la zones 1 et c_2 dans la zone 2. La quantité $\mathcal{O}$ se propage selon l'axe x en respectant l'équation de D'ALEMBERT dans les deux demi espaces.

I.1. Comment appelle -t-on de façon générale la surface de séparation entre deux zones de l'espace dans lesquelles

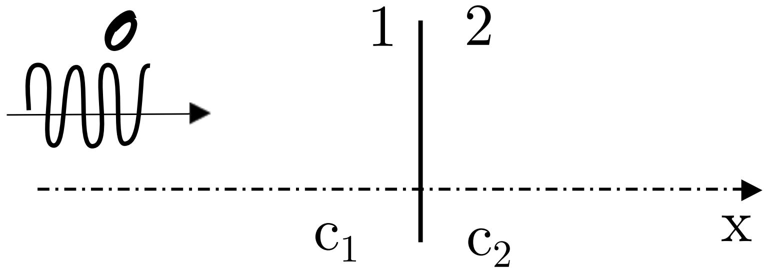

FIGURE 2 – Schéma de la figure de la réflexion et la réfraction d'une onde sur une interface plane

la vitesse de propagation d'une onde est différente ?

I.2. Donner deux exemples simples de telles surfaces, un dans le domaine optique, l'autre dans le domaine mécanique.

I.3. Une onde incidente arrive de l'espace $x < 0$, se propageant dans le **sens** de $\vec{\mathbf{e}_x}$. Quels sont les deux termes que l'on emploie pour définir les deux phénomènes physiques qui sont observés au niveau de la surface de séparation ?

I.4. Coefficients de réflexion et de transmission.

Dans la zone 1, l'onde, $\mathcal{O}_1$ peut alors se décrire comme la combinaison d'une onde incidente d'amplitude complexe $\mathcal{O}_i$ et d'une onde réfléchie d'amplitude complexe $\mathcal{O}_r$. Dans la zone 2, on décrit l'onde transmise $\mathcal{O}_2$ comme une onde progressive d'amplitude complexe $\mathcal{O}_t$. On considère qu'en $x = +\infty$, il n'y a pas de réflexion (condition de bords libres) et il n'y a donc pas d'onde rétrograde. On écrira donc :

$$\text{en zone 1 } (x < 0),\ \mathcal{O}_1(M,t) = \mathcal{O}_i \exp[j\omega t - jk_1 x] + \mathcal{O}_r \exp[j\omega t + jk_1 x]$$

$$\text{et en zone 2 } (x > 0),\ \mathcal{O}_2(M,t) = \mathcal{O}_t \exp[j\omega t - jk_2 x]$$

I.4. 1. Montrer que pour que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ soient solutions des deux équations de D'ALEMBERT dans 1 et 2, il faut que :

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1}, \text{ et que } \ k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2}$$

I.4. 2. Comment appelle- t-on de façon générale la relation entre le nombre d'onde k et la pulsationω ?

I.4. 3. A l'interface ($x = 0$), comment appelle t-on généralement les conditions que doit respecter l'onde pour passer du milieu 1 au milieu 2 ?

I.4. 4. On suppose ici que $\mathcal{O}$ doit être continu en $x = 0$ à tout instant. Ecrire alors la relation que doivent respecter $\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}_r$ et $\mathcal{O}_t$.

I.4. 5. Montrer alors que la relation que doivent respecter les coefficients complexes, d'une part en réflexion $r = \dfrac{\mathcal{O}_r}{\mathcal{O}_i}$ et d'autre part en transmission $t = \dfrac{\mathcal{O}_t}{\mathcal{O}_i}$ pour l'amplitude est :

$$1 + r = t \tag{1}$$

I.4. 6. Définir les coefficients de réflexion, R et de transmission, T, en énergie, de façon générale.

I.4. 7. Quel est le lien entre r, t, R, T ?

II. Une seule interface, incidence quelconque

L'onde incidente arrive maintenant sur l'interface plane en faisant une angle α_i avec la normale de l'interface comme représenté sur la figure 3. On se propose dans cette partie de retrouver les règles géométriques de la réfraction et de

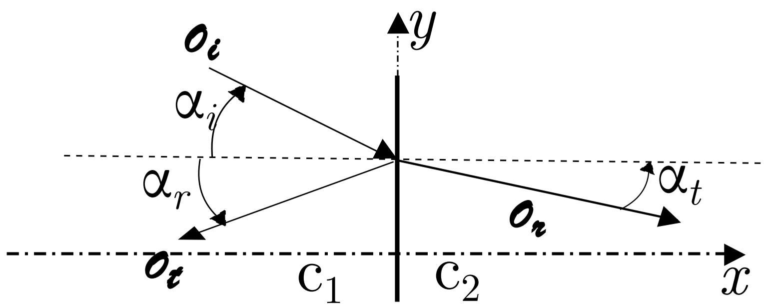

FIGURE 3 – Schéma de la réflexion d'une onde en incidence quelconque

la réflexion et d'en voir les conséquences sur les coefficients de réflexion et transmission r et t. Les vecteurs d'ondes incidente, réfléchie et transmise s'écrivent ont pour expression respective dans le plan de la figure :

$$\overrightarrow{\mathbf{k}}_i = k_1 \cos(\alpha_i)\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + k_1 \sin(\alpha_i)\overrightarrow{\mathbf{e}_y}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{k}}_r = -k_1 \cos(\alpha_r)\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + k_1 \sin(\alpha_r)\overrightarrow{\mathbf{e}_y}\,, \quad \overrightarrow{\mathbf{k}}_t = k_2 \cos(\alpha_t)\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + k_2 \sin(\alpha_t)\overrightarrow{\mathbf{e}_y}$$

avec $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}$ et $k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$.

Les amplitudes complexes de l'onde dans les deux milieux s'écrivent alors au point M de coordonnées (x, y) :

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_i \exp\left[j\omega t - j\overrightarrow{\mathbf{k}}_i.\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right] + \mathcal{O}_r \exp\left[j\omega t - j\overrightarrow{\mathbf{k}}_r.\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right]$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_t \exp\left[j\omega t - j\overrightarrow{\mathbf{k}}_t.\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right]$$

II.1. Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{k}}_i.\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ en fonction de k_1, α_i, x et y.

II.2. Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{k}}_r.\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ en fonction de k_1, α_r, x et y.

II.3. Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{k}}_t.\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ en fonction de k_2, α_t, x et y.

II.4. Ecrire la condition de continuité de l'onde à l'interface.

II.5. Cette condition doit être vérifiée, quelle que soit la valeur de t et quelle que soit la valeur de y. En déduire qu'on doit nécessairement avoir :

$$k_1 \sin(\alpha_i) = k_2 \sin(\alpha_t) \text{ et } |\alpha_i| = |\alpha_r|.$$

II.6. En optique sous quel nom connait - on ces deux règles ? Peut on généraliser la notion d'indice de réfraction d'une onde ?

II.7. Connaissez vous une expérience d'optique permettant de polariser une onde par réflexion sur une surface conductrice ?

Partie d: Réfraction frustrée et effet tunnel optique

On va s'intéresser dans cette partie à l'onde réfractée dans un milieu où la vitesse de phase est plus grande que dans le milieu de départ. Dans les notations de l'énoncé, cela correspond à $c_2 > c_1$ où encore $n_2 < n_1$. Pour cela, on se place dans le domaine de l'optique. On considère une onde électromagnétique optique, émise par une lampe à vapeur de Cadnium, rouge.

I. Mise en évidence

I.1. Quelle est la longueur d'onde typique correspondant au rouge ?

I.2. La fréquence de cette lampe spectrale est $f_0 = 4,6598 \times 10^{14}$ Hz. Quelle est sa longueur d'onde ?

I.3. Cette lampe éclaire en incidence normale un prisme dont l'angle au sommet est $\hat{A} = 41^o$, comme indiqué sur la figure 4. On apelle i l'angle d'incidence du faisceau sur la face de sortie et r l'angle de réfraction du faisceau sortant. L'indice de réfraction du verre du prisme $n_v \sim 1,5$ et celui de l'air $n_a \sim 1$. Dans la configuration montrée

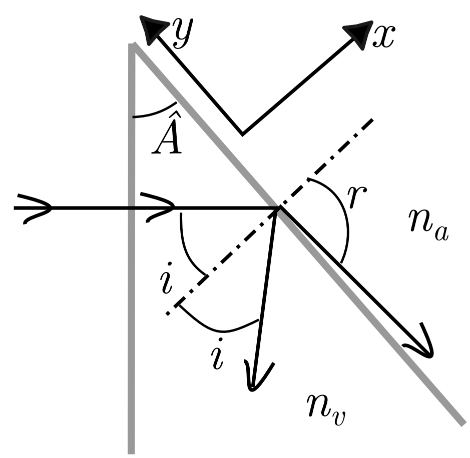

FIGURE 4 – Prisme en gris. L'indice du verre $n_v \sim 1,5$, l'indice de l'air $n_a \sim 1$.

sur la figure 4, nous sommes à la limite de la réflexion totale dans le prisme. Nous allons analyser la situation lorsque l'angle i est trop grand pour qu'un angle r puisse exister "classiquement".

I.3. 1. Convertir $\hat{A}$ en radians.

I.3. 2. Rappeler la loi de (Snell)-Descartes pour le passage du rayon du verre à l'air.

I.3. 3. De façon générale, que doit vérifier la quantité $\sin r$ pour que l'angle de réfraction existe.

I.3. 4. Quel est l'angle limite de réfraction, i_L, pour lequel, il ne peut y avoir réfraction, pour ce prisme ? Faire l'application numérique et comparer i_L à $\hat{A}$.

I.3. 5. Si $i > i_L$, que se passe -t-il donc ? Comment appelle - t- on ce phénomène ?

II. Où les formules d'Euler deviennent essentielles ...

Il est possible de montrer (oui oui même à votre niveau, mais c'est un peu longuet en calcul), que les relations de passage de l'onde électromagnétique impose qu'il y ait toujours une onde incidente, une onde réfléchie mais aussi **une onde transmise même lorsque** $i > i_L$. Cette onde transmise ne se propage pas dans l'air, elle est évanescente mais elle existe et nous allons montrer quelques unes de ces caractéristiques. Tout d'abord, grâce aux formule d'Euler nous allons modifier notre perception de la relation de Descartes.

II.1. Définir, pédagogiquement, ce qu'est une onde évanescente.

II.2. Montrer que la relation de Descartes, entre les angles i et r peut s'écrire :

$$n_v\left(e^{ji} - e^{-ji}\right) = n_a\left(e^{jr} - e^{-jr}\right)$$

II.3. Sous cette forme, mathématiquement, on a tout à fait le droit de considérer les angles i et r comme possiblement complexes. Montrer qu'alors, pour un angle $i > i_L$, donné , il existe un angle r complexe, vérifiant la relation de Descartes. Pour résoudre l'équation, on pourra poser

$$\alpha = \frac{n_a}{n_v}\sin i > 1$$

et on rappelle que

$$\sin i_L = \frac{n_a}{n_v}$$

II.4. Notons $C(r) = \dfrac{e^{jr} + e^{-jr}}{2}$. Montrer que

$$C(r) = \pm j\left(1 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_L}\right)^{1/2}$$

Faisant hurler les mathématiciens - ce qui n'est pas s'en leur plaire un petit peu - les physiciens étendent la notion trigonométrique du cosinus au nombres complexes en assimilant $C(r)$ à $\cos r$. Si l'angle r est réel, alors on retrouve le cosinus standard, sinon, ce sont les formules d'Euler qui permettent de calculer $\sin r$ et $\cos r$. Ainsi nous écrirons avec une jubilation ironique

$$\cos r = \pm j\left(1 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_L}\right)^{1/2}$$

II.5. Le vecteur d'onde dans l'air à la sortie du prisme $\overrightarrow{\mathbf{k}_a}$ se décompose selon les vecteurs de la base spatiales $\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$ et $\overrightarrow{\mathbf{e}_y}$ de la figure 4. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{k}_a} = \frac{\omega}{c}\left(\pm j\left(1 - \frac{\sin^2 i}{\sin^2 i_L}\right)^{1/2}\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + \frac{\sin i}{\sin i_L}\overrightarrow{\mathbf{e}_y}\right)$$

II.6. Par une argumentation choisie sur le comportement asymptotique de l'onde, et sur la convention choisie dans le paragraphe I, quel signe faut il choisir pour la composante selon x ?

II.7. Sur quelle distance caractéristique s'évanouit l'onde ? Faire l'application numérique pour $i = 60^o$. Combien y a t-il de longueurs d'onde dans cette distance.Conclure et commenter.

III. Effet tunnel classique

On accole au premie prisme, un second identique de telle façon que la face d'entrée du second prisme est parallèle à celle de sortie du premier, comme présenté sur la figure 5, présenté dans la configuration où $i > i_L$. Le faisceau initial a un angle d'incidence de i_0, le faisceau sortant forme un angle r avec la normale de sortie.

III.1. En applicant la loi de Snell-Descartes sur la face d'entrée du second prisme, donner la relation existant entre i_2 et i.

III.2. En déduire la relation entre $\hat{A}$, i_0, r et i.

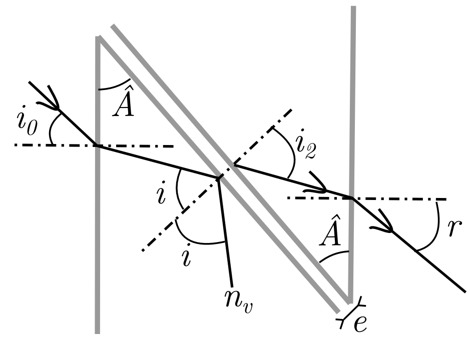

FIGURE 5 – Accolement de deux prismes. e est la distance séparant les deux prismes

III.3. Supposant que les coefficients de transmission entre l'air et le verre (noté $\mathcal{T}_1$) et entre le verre et l'air (noté $\mathcal{T}_2$) soient parfaitement connus pour cette incidence, et faisant quelques hypothèses raisonnables sur le nombre de réflexion que subit l'onde, exprimer le rapport entre l'amplitude complexe transmise et l'amplitude complexe incidente en fonction de en particulier de e et f_0.

III.4. A partir de quelle valeur numérique de e ce rapport est il inférieur à $1/100$? Est ce mesurable ?

III.5. Comment appelle -t-on le système d'ondes existant entre les deux prismes ?

III.6. Cette expérience a une analogie en mécanique quantique. Expliquer la.

III.7. Conclure.

—FIN—