Physique Quantique L3 - Contrôle 2

Remarque importante : L'usage de tout appareil électronique est interdit. Le temps de l'épreuve est de 2h. Il est conseillé de lire attentivement tout l'énoncé avant de commencer à rédiger. Il sera tenu compte du soin porté à la structure de la copie dans la notation. En particulier, il est fortement déconseillé de découper les exercices dans la rédaction. Il sera judicieux de changer de page pour chaque exercice. Un regard critique sur tout résultat démontré sera apprécié et valorisé. En particulier, toute application numérique, **même non demandée** par l'énoncé, et basée sur vos connaissances, sera la bienvenue et valorisée. Les questions au sein d'un même exercice possèdent un enchaînement logique dont la prise en compte dans la rédaction sera appréciée.

1 Question de cours et de culture générale

1.1 Quelques quantités importantes :

Donner la valeur (à défaut l'ordre de grandeur) et l'unité dans le système international des quantités physiques suivantes :

1. c vitesse de la lumière dans le vide
2. $\mathcal{R}$ constante des gaz parfaits
3. $\mathcal{N}$ nombre d'Avogadro
4. k_B constante de Boltzman
5. ε_0 permittivité diélectrique du vide
6. μ_0 perméabilité magnétique du vide
7. $\mathcal{G}$ constante de gravitation universelle
8. m_e masse de l'électron
9. m_p masse du proton
10. e charge électrique élémentaire
11. R_H constante de Rydberg
12. α_0 constante de structure fine
13. t_H âge de l'Univers
14. t_P temps de Planck
15. R_T rayon de la Terre
16. D_s ordre de grandeur de la taille du système solaire

1.2 Relations d'incertitude

En spécifiant vos notations,

1. Donner la relation d'incertitude (position-impulsion) d'Heisenberg.
2. Donner la relation d'incertitude (énergie-temps) d'Heisenberg.
3. Donner une interprétation claire de ces relations

1.3 Longueur d'onde associée aux particules

1. Donner l'expression de la longueur d'onde, λ_B de de Broglie, asociée à une particule de masse m et d'impulsion p.
2. Quelle est la relation entre λ_B et l'incertitude sur la position δx qui apparaît dans la relation d'Heisenberg ?

3. Exprimer la longueur d'onde λ_B, pour une particule libre en fonction de son énergie E.
4. Pour un proton thermique - on peut considérer que son énergie est $E = k_B T$ - exprimer λ_B en fonction de sa masse et de sa température.
5. Faire l'application numérique pour $T \sim 300K$.
6. Donner l'ordre de grandeur de la température qu'il faudrait atteindre pour que λ_B soit de l'ordre du millimètre.
7. Citer le nom d'un Prix Nobel Français qui a travaillé sur le refroidissement quasi-absolu d'atomes.

1.4 Equation de Schrödinger

On considère une fonction d'onde $\Psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)$ - décrivant une particule élémentaire de masse m et d'énergie E - de la forme

$$\Psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \exp(j\omega t)\Phi(\overrightarrow{\mathbf{r}}) \text{ avec } E = \hbar\omega$$

1. Donner l'interprétation physique de la quantité $|\Psi|^2$. On insistera sur sa dimension.
2. Donner l'équation de Schrödinger que vérifie $\Psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)$, lorsque la particule est dans un potentiel $V(\overrightarrow{\mathbf{r}})$.
3. En déduire l'équation de Scrödinger que vérifie $\Phi(\overrightarrow{\mathbf{r}})$.
4. En déduire l'équation que vérifie $\Phi(\overrightarrow{\mathbf{r}})$ lorsque le potentiel V est nul (particule libre).
5. On suppose la configuration mono-dimensionnelle selon la coordonnée cartésienne x, c'est à dire que $\Phi(\overrightarrow{\mathbf{r}}) = \Phi(x)$. Ecrire l'équation que vérifie alors $\Phi(x)$.
6. Caractériser en quelques mots cette équation.
7. Exprimer la solution générale de cette équation.
8. Quelles sont les valeurs possibles pour l'énergie ?
9. Représenter la fonction $\Psi(x, to)$, to étant fixé, en fonction de x. Quelle est la longueur caractéristique Δx de variation de Ψ selon x ?
10. Représenter la fonction $\Psi(xo, t)$, xo étant fixé, en fonction de t. Quelle est la durée caractéristique Δt de variation de Ψ selon t ?
11. Quelle est la relation entre Δx et Δt ?
12. Comment nomme t- on la quantité $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ en physique ondulatoire ?
13. Quelle est sa relation avec la quantité d'impulsion p de la particule et da sa vitesse v.

1.5 Réflexions sur l'atome d'Hydrogène

1. Rappeler la valeur de E_0, énergie de première ionisation de l'Hydrogène.
2. Rappeler l'expression de l'énergie E_n du niveau n de l'électron de l'atome d'Hydrogène, en fonction de n et E_0.
3. Exprimer alors la longueur d'onde λ_B de de Broglie de l'électron en fonction de E_0, n et m_e.
4. En supposant que l'électron se trouve dans une sphère de rayon λ_B, donner le volume v_H de l'atome d'hydrogène en fonction de E_0, n, et m_e.
5. Tracer schématiquement l'allure de v_H en fonction de n.
6. A quoi correspond la situation $n \to +\infty$? Quel est alors le volume v_H ? Cela est il cohérent (justifier votre réponse : un oui ou un non n'ayant aucun sens sans explications) ?
7. Evaluer numériquement $v_H(1)$ pour $n = 1$ et $v_H(10)$ pour $n = 10$. Y a t-il une grosse différence d'ordre de grandeur ?
8. En utilisant la loi des gaz parfaits, exprimer le volume élémentaire v_H^c, "classique", en fonction de la pression et de la température.
9. Tracer schématiquement l'évolution de v_H^c en fonction de la température.

10. Evaluer numériquement v_H^c, pour les deux températures $T_1 \sim 300K$ et $T_2 \sim 500K$, à pression de 1 atmosphère. Pour information on rappelle que le volume molaire d'un gaz parfait est de l'ordre de 20 à 30 litres à température et pression normales.
11. Comparer $v_H(1)$ avec $v_H^c(T_1)$ et $v_H^c(T_2)$.
12. Que mesure réellement chacune de ces deux grandeurs ? Est il vraiment pertinent de les comparer (justifier votre réponse : un oui ou un non n'ayant aucun sens sans explications) ? En particulier on pourra s'interroger de façon critique et constructive sur le rôle de la température dans cette comparaison.

1.6 Quelques expériences historiques

En deux pages maximum, et à l'aide de schémas clairs, exposer synthétiquement une expérience historique de mécanique quantique. Il faudra expliquer le principe de l'expérience, les résultats observés et donner l'interprétation qui en a suivi.

2 Exemples de potentiels canoniques

On rappelle l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées cartésiennes que vérifie la fonction d'onde $\Phi(x, y, z)$ associée à une particule de masse m plongée dans un potentiel $V(x, y, z)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Phi + (V(x) - E)\Phi = 0$$

On rappelle aussi le laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.1 Puits de potentiel infini en une dimension

On considère une particule de masse m dans un puits de potentiel infini comme figuré sur la figure 2.1. Cette particule ne peut pas franchir les barrières de potentiel de chaque côté du puits. Le potentiel est nul

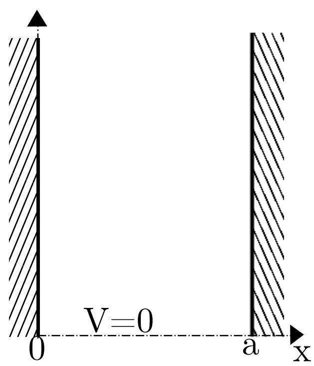

FIGURE 1 – *Puits de potentiel infini de largeur a*

entre $x = 0$ et $x = a$, et est infini à l'extérieur de cette bande. On suppose bien évidemment que la fonction d'onde Φ décrivant l'état de la particule ne dépend que de x.

1. Comment doit être $\Phi(x)$ pour $x < 0$ et $x > a$?
2. En utilisant l'équation de Schrödinger en une dimension, établir l'équation différentielle que doit vérifier $\Phi(x)$ dans la zone ou le potentiel est nul $(0 < x < a)$
3. Caractériser en quelques mots pertinents cette équation.
4. Donner la forme générale de la solution en fonction de $\gamma_E = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
5. Quelle condition doit respecter $\Phi(x = 0)$ et $\Phi(x = a)$. Comment appelle-t-on cette condition ?

6. En déduire que le nombre d'onde γ_E ne peut prendre que des valeurs discrètes, indexées par un entier n.
7. Exprimer le nombre d'onde $\gamma_E(n)$ du mode n en fonction de a et n.
8. En déduire l'expression de l'énergie $E(n)$ du mode n en fonction de a, m, n.

   Considérons maintenant un atome d'Hydrogène comme une particule élémentaire de masse m_p, bloqué dans un puits de potentiel infini. On considère cet atome comme énergiquement activé par la température ($E \sim k_B T$).

9. Exprimer alors a en fonction de n, T et m_p.
10. Evaluer numériquement a pour l'état fondamental de l'atome dans le puits ($n = 1$) pour $T \sim 300K$, puis pour $T \sim 3K$ (température de l'Hélium liquide).
11. Evaluer numériquement la température T_1 nécessaire pour obtenir $a \sim 1\mu m$?
12. Evaluer numériquement la température T_2 nécessaire pour obtenir $a \sim 1mm$?
13. Quels peuvent être les intérêts métrologiques à refroidir très fortement des atomes dans un espace confiné de taille connue ?
14. Par quels procédés physiques peut on refroidir des atomes à ces échelles de température ?
15. Connaissez vous une expérience de ce genre ?

2.2 Boîte de potentiel infini en trois dimensions

On considère maintenant que la particule est piégée dans une boîte parallélépipédique de potentiel en trois dimensions. Le potentiel $V(x, y, z)$ est nul pour $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$ et infini partout ailleurs. La particule est donc contrainte à rester dans cette boîte de volume abc. On suppose que la fonction d'onde $\Phi(x, y, z)$ décrivant l'état de la particule peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de variables séparées, soit :

$$\Phi(x, y, z) = F(x)G(y)H(z)$$

1. Etablir l'équation différentielle qui relie les trois fonctions $F(x), G(y), H(z)$ et leur dérivée seconde.
2. En divisant cette équation par le produit $F(x)G(y)H(z)$, montrer que chacune de ces trois fonctions vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \alpha_E f = 0$$

   où l'on exprimera la constante α_E pour chacune des trois fonctions F, G et H.
3. Ecrire les conditions de continuité en $x = 0$ et $x = a$ pour F.
4. Ecrire les conditions de continuité en $y = 0$ et $y = b$ pour G.
5. Ecrire les conditions de continuité en $z = 0$ et $z = c$ pour H.
6. En déduire que α_E ne peut prendre que des valeurs discrètes dans chacune des directions.
7. En déduire alors l'expression générale de l'énergie $E(n, m, q)$ du mode n (sur x), m (sur y), q (sur z).
8. Exprimer la forme de la fonction $\Phi(x, y, z)$ en fonction de a, b, c et x, y, z.
9. Quel est le lien entre la configuration tridimensionnelle et la configuration à une dimension ?
10. Dans le cas d'un boîte cubique ($b = c = a$), exprimer la différence entre les énergies $E(0, 0, 1)$, $E(0, 1, 0)$ et $E(1, 0, 0)$.
11. Considérant que l'énergie est la valeur propre associée à un opérateur linéaire, quel qualificatif peut on lui donner alors ? (On pensera à une valeur propre de matrice qui correspond à plusieurs vecteurs propres).
12. Quels principes physiques peut on utiliser pour bloquer une particule dans une telle boîte ?

—— FIN ——