A Expérience de Stern et Gerlach : Interprétation

Un atome d'argent est placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}} = (B_0 + bz)\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$ non uniforme, avec un gradient selon l'axe z. La zone de l'espace où règne ce champ est de longueur L. Le but de cette interprétation est de relier la taille des tâches observées sur l'écran aux quantités physiques de l'atome.

I. Discussion Magnétique

I.1. Comment peut on générer un tel champ magnétique sans violer les équations de Maxwell ?
I.2. Quelles hypothèses faut il faire pour que ce champ magnétique puisse correspondre à la réalité ?
I.3. Faire un schéma du dispositif.

II. Evolution temporelle en l'absence de gradient de champ

On se place dans un premier temps dans le cas où b est nul. On considère que l'état quantique de l'atome d'argent est décrit par le produit tensoriel entre ses caractéristiques de spin et ses propriétés spatiales. On appelle $\psi_\pm(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)$ la fonction d'onde de l'atome correspondant aux deux états de spin respectifs $|+\rangle$, $|-\rangle$.

II.1. Rappeler quelle est l'énergie potentielle d'un moment magnétique plongé dans un champ magnétique.

II.2. Ecrire alors sous forme d'opérateur l'Hamiltonien $\widehat{H}$ de l'atome d'argent en fonction de $\widehat{\overrightarrow{\mu}}$, de $\widehat{\overrightarrow{\mathbf{p}}}$ et de $\overrightarrow{\mathbf{B}}$.
II.3. Ecrire l'opérateur $\widehat{\overrightarrow{\mu}}.\overrightarrow{\mathbf{B}}$ sous la forme d'une matrice 2×2 qu'on exprimera en fonction de B_0 et de μ_A, le moment magnétique intrinsèque de l'atome d'Argent.
II.4. Supposant que la fonction d'onde $\Psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)$ s'écrive :

$$\Psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)\left(\alpha(t)\,|+\rangle + \beta(t)\,|-\rangle\right).$$

Montrer que

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\widehat{p}^2}{2m}\,;\; j\hbar\dot{\alpha} = -\mu_A B_0 \alpha \text{ et } j\hbar\dot{\beta} = \mu_A B_0 \beta$$

II.5. Résoudre ces équations, on posera $\omega_0 = \mu_A B_0/\hbar$ et on supposera connus α_0 et β_0.
II.6. Exprimer les valeurs moyennes des composantes $M_{x,y,z}$ du moment magnétique de l'atome.
II.7. En déduire qu'on peut écrire pour la valeur moyenne du moment magnétique :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{M}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathbf{\Omega_0}} \Lambda \overrightarrow{\mathbf{M}}$$

II.8. Interpréter ce résultat.

III. En présence de gradient de champ magnétique non uniforme.

Supposons que l'on puisse écrire la fonction d'onde totale de l'atome d'Argent sus la forme :

$$\psi(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t) = \psi_+(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)\,|+\rangle + \psi_-(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)\,|-\rangle\,.$$

III.1. Montrer que

$$j\hbar\frac{\partial\psi_\pm}{\partial t} = \left(\frac{\widehat{p}^2}{2m} \pm \mu_A(B_0 + b\widehat{z})\right)\psi_\pm t$$

III.2. Montrer que $\langle\psi_\pm|\psi_\pm\rangle$ reste constant dans le temps.

III.3. On note : $\pi_\pm = \displaystyle\int |\psi_\pm(\overrightarrow{\mathbf{r}}, t)|^2 \mathrm{d}^3\overrightarrow{\mathbf{r}}$

Montrer alors que

$$\frac{\mathrm{d}\pi_\pm}{\mathrm{d}t} = 0$$

III.4. Interpréter cette relation en terme de probabilités.

III.5. On note $\phi_\pm = \psi_\pm/\sqrt{\pm}$. Quel sens physique peut on donner à ces deux fonctions ?

III.6. Définir mathématiquement et physiquement les quantités moyennes suivantes, à partir des fobnctions $\phi_\pm$:

$$\left\langle\overrightarrow{\mathbf{r}_\pm}\right\rangle = \begin{pmatrix} \langle x_\pm\rangle \\ \langle y_\pm\rangle \\ \langle z_\pm\rangle \end{pmatrix} \qquad \left\langle\overrightarrow{\mathbf{p}_\pm}\right\rangle = \begin{pmatrix} \langle p^x_\pm\rangle \\ \langle p^y_\pm\rangle \\ \langle p^z_\pm\rangle \end{pmatrix}$$

III.7. En applicant le Théorème d'EHRENFEST, exprimer

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle\overrightarrow{\mathbf{r}_\pm}\right\rangle}{\mathrm{d}t} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\left\langle p^k_\pm\right\rangle}{\mathrm{d}t} \text{ avec } k = x, y, z$$

en fonction des données de la configuration.

III.8. La base de coordonnées spatialales est placée à l'entrée du dispositif SG. A l'instant initial (entrée des atomes dans le SG), on suppose que les atomes sont centrés en 0, avec une vitesse nulle selon y et z, mais une vitesse v selon z. Traduire ces hypothèses sur les quantités :

$$\left\langle\overrightarrow{\mathbf{r}_\pm}\right\rangle\ ,\ \left\langle p^x_\pm\right\rangle\ ,\ \left\langle p^y_\pm\right\rangle\ ,\ \left\langle p^z_\pm\right\rangle$$

III.9. En déduire qu'à la sortie du dispositif le faisceau est scindé en deux. Déterminer δz, l'écart entre les deux faisceau sur l'axe z à la sortie du dispositif en fonction de L, b, m et v.

III.10. Conclure