A Oscillateur Harmonique

L'oscillateur harmonique à une dimension est un modèle basique et fondamental en physique. En effet dès qu'un système physique, se trouve dans une position proche d'un état d'équilibre dans un potentiel, on peut développer ce dernier sous en série de Taylor par exemple. Ainsi on peut ramener l'étude du système à une analogie avec une particule massive placée dans un potentiel dépendant d'une seule coordonnée spatiale au carré.

I. Echauffement : approche non quantique

I.1. Ecrire l'Hamiltonien classique d'une particule de masse m, placé dans un potentiel d'oscillateur harmonique, en fonction de x sa position, p son impulsion, ω_0^2 la pulsation propre de l'oscillateur.

I.2. En utilisant les équations de Hamilton, rappelées ci dessous :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \text{ et } \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

Ecrire les deux équations différentielles couplées que vérifient x et p.

I.3. Ecrire ce système formellement sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbb{D}\mathbf{U} \text{ où } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} m\omega_0^2 x \\ p \end{pmatrix}$$

dans laquelle on explicitera la matrice $\mathbb{D}$

I.4. Trouver les invariants de $\mathbb{D}$.

I.5. En déduire les combinaisons linéaires entre x et p, permettant de définir deux quantités A et B vérifiant chacune une équation différentielle du premier ordre. Interpréter A et B, grâce à l'espace des phases de l'oscillateur.

I.6. Afin de symétriser le problème, on considère la quantité C :

$$C = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2}}x + j\sqrt{\frac{1}{2m\omega_0}}.$$

I.6. 1. Quel est le lien entre A, B et C ?

I.6. 2. Montrer que :

$$H = \frac{\omega_0}{2}(C.C^* + C^*.C)$$

Quelle est la dimension de C ?

II. Mise en jambe : Pasage à l'Hamiltonien quantique

L'analyse du paragraphe précédent nous amène à construire 2 opérateurs, combinaison linéaire des opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion $\hat{p}$. Il nous faut y insérer une échelle quantique qui est bien évidemment $\hbar$. On pose donc :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} + j\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\hat{p}$$

et son opérateur conjugué :

$$\hat{a}^{\#}\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} - j\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_0}}\hat{p}$$

II.1. Quelle est la dimension de $\hat{a}$.

II.2. Calculer le commutateur $\left[\hat{a}, \hat{a}^{\#}\right]$.

II.3. En utilisant le principe de correspondance remplacer C dans la relation du Hamiltonien classique et montrer que

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\#}\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

III. Petite foulée d'attaque : Action de $\hat{a}$

On pose $\hat{N} = \hat{a}^{\#}\hat{a}$, et on va s'intéresser à ses invariants. $\hat{N}$ est auto-adjoint. Nous appellerons $\{n\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $\{|n\rangle\}$ ses vecteurs propres associés , dont on rappelle, qu'ils sont orthogonaux entre eux et de norme 1.

III.1. Montrer que

$$\hat{N}\hat{a}\,|n\rangle = (n-1)\hat{a}\,|n\rangle \;\text{ et }\; \hat{N}\hat{a}^{\#}\,|n\rangle = (n+1)\hat{a}^{\#}\,|n\rangle$$

III.2. En déduire

$$\hat{a}\,|n\rangle = \alpha_1\,|n-1\rangle \;\text{ et }\; \hat{a}^{\#}\,|n\rangle = \alpha_2\,|n+1\rangle$$

avec α_1 et α_2 scalaires.

III.3. En déduire alors :

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \;\text{ et }\; \hat{a}^{\#}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

III.4. Par un petit raisonnement par récurrence, montrer que la seule possibilité de quantification convenable est que n est forcément entier et que l'état fondamental correspond à $n = 0$. On appellera $|0\rangle$ l'état fondamental de l'oscillateur quantique.

III.5. Expliquer rapidement pourquoi on appelle $\hat{a}$, l'opérateur an

IV. Foulée de Marathon : Détermination des invariants de $\hat{H}$

IV.1. Donner alors le spectre de $\hat{H}$.

IV.2. Que peut on remarquer pour l'état $n = 0$?

IV.3. Déterminons la fonction d'onde $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ du mode n.

IV.3. 1. La fonction d'onde "fondamentale" $\phi_0(x)$ vérifie donc :

$$\langle x|\, \hat{a}\, |0\rangle = 0$$

Résoudre l'équation différentielle qui découle de cette égalité.

IV.3. 2. Exprimer $\phi_n(x)$ en fonction de $\hat{a}^{\#}$, n et $\phi_0(x)$.

IV.3. 3. Exprimer $\phi_n(x)$ en fonction de $\hat{a}^{\#}$, n et $\phi_{n-1}(x)$

V. Etirement : pour aller plus loin

V.1. Revenir à l'équation de Schrödinger stationnaire, en posant :

$$\epsilon = \frac{E}{\hbar\omega_0} \text{ et } \xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x$$

V.2. Chercher la définition des polynômes de Hermite.

V.3. En déduire la forme de $\phi_n(x)$.