Exercices Ondes Electromagnétiques 2013-2014 - L2 -PC

Partie a: Propagation des OEM dans des cas particuliers

I. Généralités

I.1. Donner les quatre équations locales de Maxwell en donnant la signification physique des termes. Pour chacune des équations locales donner une interprétation intégrale.

I.2. A partir des équations de Maxwell, retrouver l'équation de propagation des champs électrique et magnétique en présence de charges et de courants.

I.3. Dans un métal non parfaitement conducteur, on appelle σ la conductivité. Donner la loi d'Ohm locale existant entre la densité de courant et le champ électrique. Justifier brièvement le fait que la densité locale de charges électriques est nule en régime stationnaire. En déduire l'équation de propagation que vérifie alors le champ électrique.

II. Propagation dans un métal

On cherche à faire propager une onde plane électromagnétique dans un métal. On considère une fine pellicule de métal d'épaisseur e, de conductivité σ comme présenté sur la figure 1. On suppose l'existence d'une onde plane

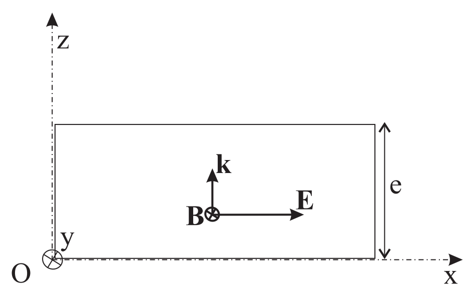

Figure 1 – Schéma de la propagation d'une onde plane dans une lame métallique

de pulsation ω, se propageant selon l'axe $\overrightarrow{\mathbf{u}_z}$, ayant pour forme en notation complexe dans le trièdre orthonormé direct $\{\overrightarrow{\mathbf{u}_x}, \overrightarrow{\mathbf{u}_y}, \overrightarrow{\mathbf{u}_z}\}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{E}} &= E_0 \exp[j\omega t - jkz] \quad \overrightarrow{\mathbf{u}_x}\\ \overrightarrow{\mathbf{B}} &= B_0 \exp[j\omega t - jkz] \quad \overrightarrow{\mathbf{u}_y}\end{aligned}$$

où k le nombre d'onde complexe , E_0 et B_0 des constantes complexes.

II.1. Quelle relation lie E_0 et B_0 ?

II.2. Justifier numériquement le fait que l'on puisse négliger le courant de déplacement dans l'équation de propagation du champ électrique. On prendra $\omega \sim 10^{15}$ rad/s et $\sigma \sim 10^8\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$.

II.3. Déterminer la relation de dispersion nécessaire pour que ce champ soit solution de l'équation de propagation du champ électrique dans le métal.

II.4. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$. Comment appelle-t-on traditionnellement δ ? Montrer que :

$$\overrightarrow{\mathbf{E}} = E_0 \exp[-\frac{z}{\delta}] \exp[j\omega t - j\frac{z}{\delta}]\overrightarrow{\mathbf{u}_x}$$

II.5. Tracer sommairement, sur un graphe, le module de du champ électrique en fonction de z. Comment

II.6. Lorsque l'épaisseur e est de l'ordre de grandeur de δ, de combien est divisée l'amplitude du champ lors de la traversée de la lame de métal ?

III. Application

On utilise une fine lame d'or dans le domaine de l'optique. On suppose que l'onde électromagnétique précédente modélise la lumière du soleil, représentée sommairement comme la somme de trois ondes d'amplitude initiale identique E_0 de pulsations ω_b, ω_j, et ω_r, correspondant respectivement aux couleurs bleue, jaune et rouge. On appellera E_b^e, E_j^e et E_r^e, les amplitudes repectives de ces trois pulsations en $z = e$.

III.1. Calculer l'épaisseur e que doit avoir la lame pour que le rapport E_b^e/E_0 soit égal à 0,1. Faire l'application numérique.

III.2. Pour l'épaisseur de lame précédemment trouvée, que valent les rapports E_j^e/E_0 et E_r^e/E_0 ?

III.3. Quelle est l'utilité de cette lame en optique ? Citer des exemples concrets d'utilisation de ces lames minces de conducteurs nobles.

Données numériques : $\omega_b = 4,7.10^{15}$ rad/s ; $\omega_r = 2,4.10^{15}$ rad/s ; $\omega_r = 3,1.10^{15}$ rad/s ; la conductivité électrique de l'or est $\sigma_o \sim 5.10^7\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m}^{-1}$; la permittivité diélectrique du vide est $\epsilon_0 \sim \frac{10^{-9}}{36\pi}$ farad/ m ; la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 \sim 4\pi.10^{-7}$ tesla m/A

IV. Propagation entre deux plans métalliques parallèles

Soient $y = 0$ et $y = a$deux plans parfaitement conducteurs. On étudie la propagation dans la direction x d'une onde transversale électrique. On recherche si des solutions de la forme suivante sont possibles :

$$E_x = 0,\ E_y = 0,\ E_z = E_3(y)\exp(j(\omega t - kx))$$

et

$$B_x = B_1(y)\exp(j(\omega t - kx)),\ B_y = B_2(y)\exp(j(\omega t - kx)),\ B_z = B_3(y)\exp(j(\omega t - kx))$$

IV.1. Donner les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courants.

IV.2. En déduire les relations :

$$\begin{aligned}
-jkB_1 + dB_2/dy &= 0 && (1)\\
dE_3/dy &= -j\omega B_1 && (2)\\
jkE3 &= -j\omega B_2 && (3)\\
-j\omega B_3 &= 0 && (4)\\
-jkB2 - dB1/dy &= (j\omega/c^2)E_3 && (5)
\end{aligned}$$

IV.3. Déduire des équations $(2, 3, 5)$ l'équation différentielle vérifiée par E_3.

IV.4. Résoudre cette équation en écrivant les conditions aux limites sur chaque plan métallique.

IV.5. Montrer l'existence d'une pulsation de coupure ω_c. Que se passe-t-il en deça de cette pulsation ?

IV.6. Calculer le champ magnétique pour le mode de base.

IV.7. Calculer la valeur instantannée et la moyenne du vecteur de Poynting.

IV.8. Conclure sur les flux d'énergie.

IV.9. Calculer les vitesses de phase et de groupe.

V. Modèle de propagation de la lumière dans le vide

La lumière est une onde électromagnétique, que l'on supposera ici plane et progressive.

V.1. Quelle est la plage de longueur d'onde de la lumière visible ?

V.2. Donner numériquement la valeur de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

V.3. En supposant la lumière comme une onde plane progressive, donner l'expression du vecteur de Poynting réel $\overrightarrow{\mathbf{\Pi}}(M,t)$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{E}}(M,t)$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}}(M,t)$

V.4. En utilisant la relation entre $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ et le vecteur d'onde $\overrightarrow{\mathbf{k}}$, exprimer le vecteur de Poynting réel en fonction de la norme E_0 du champ électrique, et des constantes ε_0 et μ_0.

V.5. Flux du vecteur de Poynting au travers une surface

On suppose un faisceau lumineux se propageant selon l'axe x avec un vecteur d'onde $\overrightarrow{\mathbf{k}} = k\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$. On considère une surface de collecte S, qui fait un angle β, avec l'axe x : c'est à dire que sa normale $\overrightarrow{\mathbf{n}_S}$ est inclinée d'un angle β par rapport à l'axe x comme représenté sur la figure 2

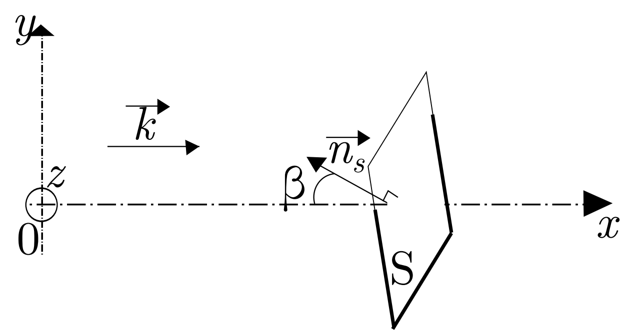

FIGURE 2 – *Flux lumineux au travers une surface S, dont la normale n'est pas parallèle au vecteur d'onde.*

V.5. a. Exprimer le flux Φ_S du vecteur de Poyinting au travers la surface S en fonction de Π_0 son amplitude et de $\cos\beta$.

V.5. b. En déduire que le flux sur une surface inclinée S est le même que sur une surface plus petite $s(\beta)$, dont la normale serait parallèle à l'axe x. Donner la relation entre $s(\beta)$ et S.

V.5. c. Pour quelle valeur de β le flux est il maximum ?

V.5. d. Pourquoi les panneaux solaires ne sont ils pas positionnés horizontalement ? Cela vous semble - t-il paradoxal ?

V.5. e. Quel est la puissance solaire moyenne reçue par la terre par unité de surface sous les latitudes tempérées ?

V.6. Le voyage interstellaire écologique

On imagine dans l'espace une voile faite en matériau réfléchissant : mince feuille d'or, kevlar..., offrant au soleil une surface S. On suppose que cette voile coupe complètement le rayonnement solaire, c'est à dire que l'onde électromagnétique ne la traverse pas du tout, elle est complètement réfléchie. On suppose que le rayonnement arrive normalement à la voile. D'autre part, on peut associer (voir le Jackson "Classical Electrodynamics") à tout rayonnement électromagnétique une quantité vectorielle, notée $\overrightarrow{\mathbf{p}_r}$, parallèle au vecteur d'onde, appelée impulsion, homogène à une quantité de mouvement **par unité de volume** définie comme :

$$\overrightarrow{\mathbf{p}_r} = \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\mathbf{\Pi}}$$

On appelle $\overrightarrow{\mathbf{p}_r^i}$ l'impulsion du rayonnement incident sur la voile et $\overrightarrow{\mathbf{p}_r^f}$ celle du rayonnement réfléchi comme

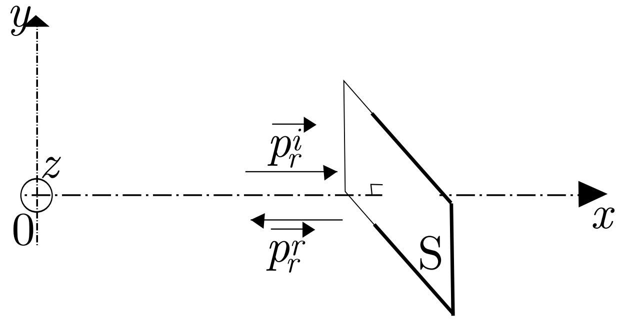

FIGURE 3 – *Variation de l'impulsion du rayonnement lors d'une réflexion.*

V.6. a. Montrer que pendant le laps de temps δt, le rayonnement inclus dans le volume $S\,c\,\delta t$ situé à gauche de la voile subit une variation d'impulsion $\overrightarrow{\delta \mathbf{p}_r}$ telle que :

$$\overrightarrow{\delta \mathbf{p}_r} = -(c\,S\,\delta t)\,2\Pi_0 \overrightarrow{\mathbf{e}_x}$$

V.6. b. On considère le système composé par le rayonnement situé dans le volume $S\,c\,\delta t$ et la voile solaire. Comment est ce système vis à vis du reste de l'univers ?

V.6. c. En déduire que sa quantité totale de mouvement doit se conserver pendant le laps de temps δt.

V.6. d. Notons $\overrightarrow{\mathbf{P}_l}$ la quantité de mouvement de la voile. En utilisant la question précédente montrer que pendant le laps de temps δt, la quantité de mouvement de la voile varie de $\overrightarrow{\delta \mathbf{P}_l}$ telle que :

$$\overrightarrow{\delta \mathbf{P}_l} = -\overrightarrow{\delta \mathbf{p}_r}$$

V.6. e. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer alors que la voile est soumise du côté gauche à une force de radiation $\overrightarrow{\mathbf{F}_r}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}_r} = 2\frac{\Pi_0}{c}\,S\,\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$$

V.6. f. La voile possède une masse M. Exprimer l'accélération qu'elle subit en fonction de Π_0, de M, et de c.

V.6. g. Exprimer le temps que mettrait la voile pour atteindre la distance D par ce moyen de propulsion en fonction de Π_0.

V.6. h. Faire l'application numérique pour $D = 10^9$ km, $S = 300$ m^2, M=100 kg, $\Pi_0 \sim 1000$ W/ m^2.

V.6. i. Quelle sera alors la vitesse de la voile ? La comparer numériquement à c.

——————— **Rappels de quelques relations utiles** ———————

Egalité de Green-Ostrogradski : Soit $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ un champ vectoriel, soit V un volume de contrôle délimité par une surface fermée Σ sur laquelle on peut définir la normale extérieure $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{S}}$ en tout point, alors :

$$\iiint_V div\left(\overrightarrow{\mathbf{A}}\right)\mathrm{d}\tau = \oiint_\Sigma \overrightarrow{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{S}}$$

Egalité de Stockes : Soit $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ un champ vectoriel, soit $\mathcal{C}$ un contour fermé orienté sur lequel s'appuie une surface quelconque Σ sur laquelle on peut définir la normale en tout point, $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{S}}$, orientée d'après le contour $\mathcal{C}$ par la règle de la main droite, alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\mathbf{A}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{l}} = \iint_\Sigma rot(\overrightarrow{\mathbf{A}})\mathrm{d}\overrightarrow{\mathbf{S}}$$

Relations d'analyse vectorielle :

$$\forall f, rot(grad f) = 0\,;\ \forall\overrightarrow{\mathbf{A}}, div(rot\overrightarrow{\mathbf{A}}) = 0\,;\ \forall\overrightarrow{\mathbf{A}}, rot(rot\overrightarrow{\mathbf{A}}) = grad(div\overrightarrow{\mathbf{A}}) - \Delta\overrightarrow{\mathbf{A}}$$

———————