Contrôle Continu 3 OEM 2013-2014 - L2 -PC

Documents interdits. Calculatrices interdites. Appareils électroniques nomades interdits. Durée de l'épreuve : 1h30.

Partie a: Généralités

I. Equations de Maxwell

I.1. Donner les quatre équations de Maxwell. Donner la signification physique ainsi que le nom de tous les termes. Donner la valeur numérique des constantes.
I.2. Donner et nommer les quatres lois intégrales correspondantes.

II. Equation des ondes et conservation de la charge électrique

II.1. Démontrer l'équation de D'Alembert que respecte le champ électrique.
II.2. Démontrer la loi de conservation de la charge électrique.

Partie b: Rappels d'électro et magnétostatique

I. Electrostatique

I.1. On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 posées en deux points $0_1(-a, 0, 0)$ et $0_2(+a, 0, 0)$. Les coordonnées sont cartésiennes. On cherche à exprimer le potentiel V et le champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en tout point M de l'espace en fonction de q_1,q_2, a et les coordonnées du point M.
I.1. a. Faire un schéma.
I.1. b. Exprimer le potentiel V en tout point de coordonnées $M(x, y, z)$
I.1. c. Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en tout point de coordonnées $M(x, y, z)$
I.1. d. Commenter

I.2. Enoncer le théorème de Gauss.

I.3. On considère une distribution de charge volumique ρ, uniforme et sphérique contenue dans une sphère de rayon R_0. La charge totale Q_0 contenue dans la sphère est donnée.On souhaite exprimer simplement le potentiel V et le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en **tout point de l'espace** $M(r, \theta, \varphi)$
I.3. a. Faire un schéma en explicitant les coordonnées sphériques.
I.3. b. Trouver la relation entre Q_0, ρ et R_0.
I.3. c. En argumentant sur les symétries de la distribution de charges, montrer que le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ est radial.
I.3. d. En argumentant sur les symétries de la distribution de charges, montrer que le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ ne dépend que de la coordonnée r.
I.3. e. En appliquant le théorème de Gauss sur une surface bien choisie, déduire l'expression du champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ en fonction de r, à l'intérieur ainsi qu'à l'extérieur de la sphère.
I.3. f. En déduire, le potentiel électrostatique V , en fonction de r. Spécifier la jauge utilisée.

I.4. La distribution de charge est maintenant uniquement sur la surface de la sphère de rayon R_0. On note σ la distribution surfacique de charges. La charge Q_0 totale est la même que précédement.

I.4. a. Trouver la relation entre Q_0, σ et R_0.

I.4. b. En argumentant sur les symétries de la distribution de charges, montrer que le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ est radial.

I.4. c. En argumentant sur les symétries de la distribution de charges, montrer que le champ $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ ne dépend que de la coordonnée r.

I.4. d. En déduire, le potentiel électrostatique V , en fonction de r. Spécifier la jauge utilisée.

I.5. Conclure en comparant les effets des deux systèmes de distribution.

II. Magnétostatique

II.1. On considère une spire circulaire de rayon R_0 parcouru par un courant I. On cherche à exprimer le potentiel le champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en tout point M de **l'axe** z orthogonal au plan de la spire et passant par son centre O. **II.1. a.** Faire un schéma.

II.1. b. Ennoncer la loi de Biot et Savart pour un conducteur filiforme (fil).

II.1. c. Nous allons l'appliquer au cas de la spire circulaire. Par des considérations de symétries, montrer que sur l'axe le champ magnétique peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(z) = B_z(z)\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$$

II.1. d. Intégrer alors la loi de Biot et Savart sur la spire circulaire pour obtenir l'expression du champ magnétique en fonction de z.

II.1. e. On appelle α le demi-angle sous lequel le point M voit la spire. Faire un schéma. Montrer que le champ magnétique s'exprime, en fonction de α comme proportionnel à $\sin^3 \alpha$.

II.2. Utiliser cette expression pour montrer que le champ magnétique créé par un solénoïde de longueur fini sur son axe est

$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = B_0 \left(\cos \alpha_1 - cos \alpha_2\right) \overrightarrow{\mathbf{e}_z}$$

où $\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$ est le vecteur unitaire de l'axe du solénoïde, α_1 et α_2 les demi-angles sous lesquels le point M voit les deux "bouts" du solénoïde, et B_0 une constante dépendant de R_0 le rayon du solénoïde et du nombre n de spires du solénoïde par unité de longueur.

II.3. Solénoïde de longueur infini

II.3. a. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que dans un solénoïde de longueur infinie, le champ magnétique possède la même valeur sur son axe, quelle que soit la position du point d'observation et donner l'expression de cette valeur.

II.3. b. Préciser ce que l'on entend par "longueur infinie".

II.3. c. En utilisant le théorème d'Ampère à l'intérieur du solénoïde, avec un schéma à l'appui, montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde.

II.3. d. En utilisant le théorème d'Ampère à l'extérieur du solénoïde, avec un schéma à l'appui, montrer que le champ magnétique est uniforme à l'extérieur du solénoïde.

II.3. e. En utilisant le théorème d'Ampère à cheval entre l'extérieur et l'intérieur du solénoïde, avec un schéma à l'appui, montrer que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.

II.4. Bobines de Helmoltz

On considère deux spires circulaires, de rayon R_0, identiques, de même axe z, distantes l'une de l'autre de la distance D. Leur centre respectif O_1 et 0_2 ont pour milieu le point 0centre du repère.

II.4. a. Faire un schéma.

II.4. b. En utilisant le résultat de la question sur la spire, exprimer le champ magnétique total $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ en tout point M de l'axe z compris entre O_1 et O_2, en fonction de D.

II.4. c. Tracer sur un graphe l'allure de typique de la composante B_z du champ magnétique pour plusieurs valeurs de D.

II.4. d. Y a-t-il une valeur particulière de D en fonction de R_0 ?

III. Une application des Forces de Laplace en statique : définition légale de l'Ampère

On considère un fil conducteur de section négligeable, de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I_0. On cherche à calculer le champ magnétique qu'il produit en un point M. Les coordonnées cylindro-polaires sont définies sur la figure 1 (à gauche). Le trièdre cartésien $\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_y}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$

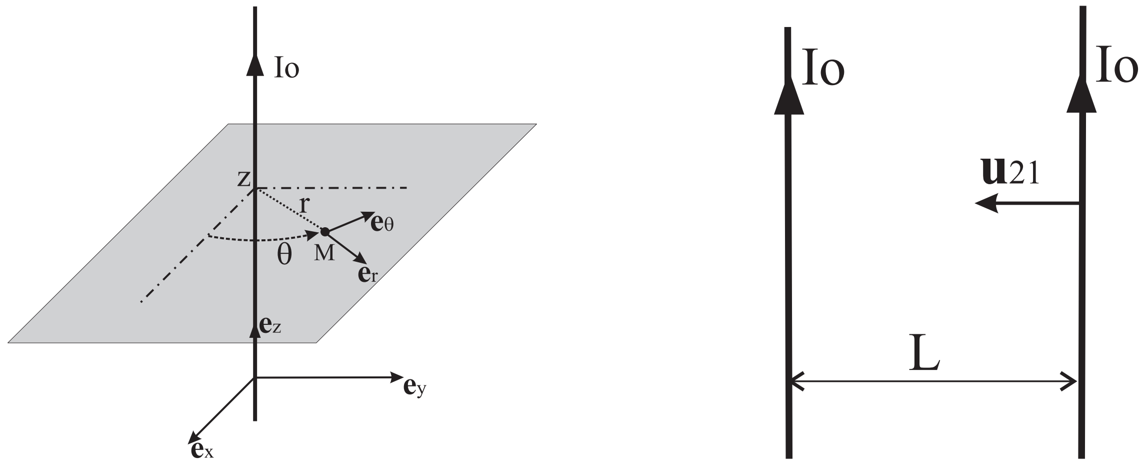

FIGURE 1 – Coordonnées cylindro-polaires à gauche et double fil à droite

est orthornormé direct ainsi que le trièdre local de la base cylindro-polaire $\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$. Le point M est repéré en coordonnées cylindro-polaires par la distance r qui le sépare du fil, l'angle θ entre les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$ et $\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$ et sa côte z. **III.1. En justifiant très clairement** les hypothèses utilisées, exprimer la direction du champ magnétique vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{B}}(M)$ en fonction des vecteurs de la base cylindro-polaire $\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$.

III.2. En justifiant très clairement le raisonnement montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{B}}(M)$ ne dépend que de r.

III.3. Exprimer $\overrightarrow{\mathbf{B}}(M)$ en fonction de r, $\overrightarrow{\mathbf{e}_r}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta}$, $\overrightarrow{\mathbf{e}_z}$, I_0.

III.4. A une distance L du premier fil, on place maintenant un fil identique, parallèle, parcouru par un courant d'intensité I_0 dans le même sens que celui parcourant le premier fil comme indiqué sur la figure 1 (à droite).

III.5. Montrer que la force $\overrightarrow{\mathbf{f}_{12}}$ exercée par le premier fil sur le second, **par unité de longueur** a pour expression :

$$\overrightarrow{\mathbf{f}_{12}} = \frac{\mu_0 I_0^2}{2\pi L}\overrightarrow{\mathbf{u}_{21}}$$

où $\overrightarrow{\mathbf{u}_{21}}$ est le vecteur unitaire orienté du fil 2 vers le fil 1.

III.6. Faire l'application numérique pour $L = 1$ m, $I_0 = 1$ A, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ T m/A

III.7. En déduire une définition de l'Ampère. Connaissez vous sa définition légale ?

Partie c: Induction electromagnétique

I. Conducteur fixe et champ variable

I.1. Induction mutuelle

Considérons deux spires conductrices, identiques, circulaires de rayon R_0 de même axe z positionnées en O_1 et O_2 de côte respective z_1 et z_2. La spire 1 est parcourue par un courant $I_1(t)$ dépendant du temps.

I.1. a. Faire un schéma.

I.1. b. En utilisant la loi de Biot et Savart, exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}_1}(M,t)$ généré par la spire 1, en tout point M du plan contenant la spire z_2, comme une intégrale sur la spire 1.

I.1. c. Montrer que $\overrightarrow{\mathbf{B}_1}(M,t)$ est proportionnel à $I_1(t)$. On appellera K ce coefficient de proportionnalité, que l'on exprimera comme une intégrale sur la spire 1.

I.1. d. Montrer que le flux, $\Phi_2(\overrightarrow{\mathbf{B}_1})$, de champ magnétique créé par la spire 1 dans la spire 2 est proportionnel à $I_1(t)$. On appellera M ce coeffcient de proportionnalité, que l'on exprimera en fonction de K et d'une intégrale de surface sur la spir 2.

I.1. e. Montrer que la différence de potentiel e_2 induite sur l'ensemble de la spire 2 s'écrit :

$$e_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

I.1. f. Donner la dimension de M. Donner son unité la plus évidente dans le système international. Quel est le nom de ce coefficient ?

I.1. g. Trouver une expression analytique simple de M en fonction de la surface de la spire 2 et en faisant l'hypothèse que le champ $\overrightarrow{\mathbf{B}_1}$ est uniforme à l'intérieur de la spire 2.

I.2. Auto-inductance

On considère maintenant un solénoïde cylindrique, de longueur finie L_s, de rayon R_s, parcouru par un courant $I_s(t)$ dépendant du temps. Pour se simplifier l'étude, nous faisons l'hypothèse, que le champ magnétique créé dans le solénoïde est uniforme. Il est noté $\overrightarrow{\mathbf{B}_s}(t)$.

I.2. a. Faire un schéma.

I.2. b. Montrer que le flux du champ magnétique au travers tout le solénoïde (c'est à dire toutes ses spires) est proportionnel à $I_s(t)$. On appellera L le coefficient de proportionnalité que l'on exprimera en fonction de R_s, L_s et n le nombre de spires su solénoïde par unité de longueur.

I.2. c. Quelle est la dimension de L. Quelle est son unité dans le système international ?

I.2. d. Montrer que la différence de potentiel induite sur l'ensemble du solénoïde,e, est

$$e = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

I.2. e. Faire un schéma d'électrocinétique du dippôle équivalent à ce solénoïde en faisant clairement apparaître le sens conventionnel des courants et tensions.

I.2. f. e est elle déterminée en convention récepteur ou émetteur ?

I.3. Application : transformateur de tension

On considère un solénoïde long, de longueur L_1,de rayon R_1, comportant n_1 spires par unité de longueur, de résistance électrique r, soumis à une différence de potentiel $u_1(t)$ variable dans le temps. On dispose à l'intérieur de ce solénoïde, un second solénoïde, de longueur L_1, de rayon $R_2 < R_1$, comportant n_2 spires par unité de longueur, de résistance électrique r.

I.3. a. Faire un schéma

I.3. b. Exprimer le flux du champ $\overrightarrow{\mathbf{B}_1}(t)$ créé par le premier solénoïde, au travers du second.

I.3. c. En déduire l'expression de la tension $u_2(t)$ induite dans le second solénoïde en fonction de $u_1(t)$.

I.3. d. Commenter l'utilité du circuit.

II. Conducteur mobile dans un champ magnétique

II.1. Principe d'un générateur de tension

On considère une spire carrée de côté a, placée initialement dans le plan yOz. le centre du carré est le centre du repère cartésien $Oxyz$. Un champ magnétique uniforme et constant, $\overrightarrow{\mathbf{B}_0} = B_0\overrightarrow{\mathbf{e}_x}$, est généré par un système de courants non étudié ici.

II.1. a. Faire un schéma avec les axes.

II.1. b. La spire est mise en rotation autour de l'axe z, à une vitesse angulaire Ω_0, par un dispositif non étudié ici. Exprimer la différence de potentiel qui apparaît le long de la spire en fonction de Ω_0, a et B_0.

II.1. c. Par un dispositif adapté, non étudié, la spire est relié à une résistance électrique R_c. Faire un schéma électrique équivalent. En déduire le courant I qui traverse la résistance et qui parcour la spire.

II.1. d. En déduire l'expression de la force de Laplace qui s'exerce sur l'intégralité de la spire carrée. En déduire le moment des forces qui s'exercent par rapport à l'axe z

II.2. Principe d'un moteur électrique

Le même dispositif que l'exercice précédent est repris. Maintenant, le mouvement de la spire n'est pas forcé par l'extérieur. La spire est parcourue par un courant $I_0(t)$, à priori dépendant du temps. La spire est dans un plan quelconque contenant l'axe z, plan repéré par un angle θ par rapport au plan xOy.

II.2. a. Faire plusieurs schémas, vu du dessus, vue de face, ... faisant figurer clairment les axes et les notations.

II.2. b. Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur l'intégralité de la spire, en fonction de θ, de l'amplitude B_0 du champ, du courant $I_0(t)$ et de la distance a.

II.2. c. En déduire le moment des forces qui s'exerce sur la spire, par rapport à l'axe z.

II.2. d. A quoi peut servir ce dispositif ? Fonctionne-t-il si le courant est constant ?