Ondes Electromagnétiques - Contrôle Continu 1

Calculatrices interdites, appareils électroniques interdits, documents interdits. Durée : 20 minutes

Partie a: Analyse vectorielle

I. Rappel sur les coordonnées

On rappelle qu'il est important de ne pas confondre un vecteur et sa représentation. Si un vecteur existe (par exemple le champ de gravitation terrestre), il aura des représentations **différentes** selon le système de coordonnées choisi, mais le vecteur lui n'est pas modifié quand on change sa représentation. Ainsi un vecteur local, au point M $\overrightarrow{\mathbf{\Psi}}(M)$ peut s'écrire en coordonnées cartésiennes ou sphériques soit :

$$\overrightarrow{\mathbf{\Psi}}(M) = \Psi_x(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + \Psi_y(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_y} + \Psi_z(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_z} = \Psi_r(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_r} + \Psi_\theta(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta} + \Psi_\varphi(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_\varphi}$$

I.1. Représenter sur un schéma, en un même point M, les trois systèmes de coordonnées de ce point (coordonnées et vecteur de base).
I.2. Représenter un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{\Psi}}(M)$ sur le même schéma avec ses composantes dans les 3 systèmes de coordonnées.

II. Quelques propriétés des opérateurs vectoriels

On considère deux champs vectoriels $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ quelconques et deux champs scalaires f et g.
On rappelle que le vecteur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\mathbf{e}_x}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{\mathbf{e}_y}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{\mathbf{e}_z}\frac{\partial}{\partial z} = \left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.$$

II.1. Gradient
II.1. a. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) + \overrightarrow{\mathbf{grad}}(g)$$

II.1. b. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f.g) = f\overrightarrow{\mathbf{grad}}(g) + g\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)$$

II.2. Rotationnel
II.2. a. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{B}}) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{A}}) + \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{A}})$$

II.2. b. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(f.\overrightarrow{\mathbf{A}}) = f\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\Lambda\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}}$$

II.2. c. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\right) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

II.3. Divergence
II.3. a. Montrer que

$$\mathrm{div}(f.\overrightarrow{\mathbf{A}}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}}) + \overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)$$

II.3. b. Montrer que

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}}) = 0$$

III. Equations de Maxwell dans le vide

III.1. Donner les 4 équations de Maxwell dans le vide en donnant le nom de chaque terme utilisé.
III.2. Donner les valeurs numériques (ainsi que les unités) des constantes ε_0 et μ_0