Partie a: Analyse vectorielle

I. Rappel sur les coordonnées

On rappelle qu'il est important de ne pas confondre un vecteur et sa représentation. Si un vecteur existe (par exemple le champ de gravitation terrestre), il aura des représentations **différentes** selon le système de coordonnées choisi, mais le vecteur lui n'est pas modifié quand on change sa représentation. Ainsi un vecteur local, au point M $\overrightarrow{\boldsymbol{\Psi}}(M)$ peut s'écrire en coordonnées cartésiennes ou sphériques soit :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Psi}}(M) = \Psi_x(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_x} + \Psi_y(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_y} + \Psi_z(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_z} = \Psi_r(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_r} + \Psi_\theta(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta} + \Psi_\varphi(M)\overrightarrow{\mathbf{e}_\varphi}$$

I.1. Représenter sur un schéma, en un même point M, les trois systèmes de coordonnées de ce point (coordonnées et vecteur de base).

I.2. Représenter un vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{\Psi}}(M)$ sur le même schéma avec ses composantes dans les 3 systèmes de coordonnées.

I.3. Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes, puis cylindriques, puis sphériques. (On pourra s'aider du livre "Electrodynamique Classiques", de Jackson, disponible à la BU).

II. Quelques propriétés des opérateurs vectoriels

On considère deux champs vectoriels $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ quelconques et deux champs scalaires f et g.

II.1. Gradient

II.1. a. Déterminer les composantes du gradient dans la base cylindrique et dans la base sphérique.

II.1. b. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) + \overrightarrow{\mathbf{grad}}(g)$$

II.1. c. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f.g) = f\overrightarrow{\mathbf{grad}}(g) + g\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)$$

II.1. d. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\frac{1}{OM}\right) = -\frac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{OM^3}$$

II.2. Rotationnel

II.2. a. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(f+g) = \overrightarrow{\mathbf{rot}}(f) + \overrightarrow{\mathbf{rot}}(g)$$

II.2. b. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(f.\overrightarrow{\mathbf{A}}) = f\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\Lambda\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}}$$

II.2. c. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)\right) = 0$$

II.3. Divergence

II.3. a. Montrer que

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{B}}) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}}) + \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{B}})$$

II.3. b. Montrer que

$$\mathrm{div}(f.\overrightarrow{\mathbf{A}}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}}) + \overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f)$$

II.3. c. Montrer que

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}}\Lambda\overrightarrow{\mathbf{B}}) = \overrightarrow{\mathbf{B}}.\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}} - \overrightarrow{\mathbf{A}}.\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{B}}$$

II.3. d. Montrer que

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}}) = 0$$

II.4. Laplacien

Attention le Laplacien se note, en France, Δ. Cette notation est ambigüe car le signe Δ est aussi utilisé pour marquer une différence de valeur. C'est pourquoi, il vaut mieux lui préférer la notation plus mondiale de ∇^2 ou $\vec{\nabla}^2$.

Le Laplacien a la particularité de pouvoir s'appliquer aux scalaires mais aussi aux vecteurs. Le Laplacien vectoriel est le vecteur formé, en coordonnées cartésiennes par les trois Laplaciens scalaires de chacune des coordonnées scalaires. Si $\Phi(M)$ est un champ scalaire et $\overrightarrow{\mathbf{\Psi}}(M)$ un champ vectoriel :

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \text{ et } \Delta\overrightarrow{\mathbf{\Psi}} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

II.4. a. Montrer que

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{grad}} f) = \Delta f$$

II.4. b. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\overrightarrow{\mathbf{A}}) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}})) - \Delta\overrightarrow{\mathbf{A}}$$

III. Interprétations du gradient

Le gradient est un opérateur agissant sur un champ scalaire $\mathcal{C}(M)$ pour donner un vecteur, local, dirigé dans le sens croissant de $\mathcal{C}$.

III.1. Sous l'eau, la pression hydraulique augmente de l'équivalent d'une atmosphère tous les dix mètres. On écrira donc au point $M(x, y, z)$

$$P(M) = P_0 + A(z - z_0)$$

où P_0 est la pression atmosphérique, z_0 le niveau de la surface de l'eau, z la côté du point M.

III.1. a. Faites un schéma faisant apparaître les axes, le point M et ses coordonnées.

III.1. b. Déterminer numériquement A.

III.1. c. Donner l'expression du gradient de la pression, en coordonnées cartésiennes. Dessiner ce vecteur sur votre schéma.

III.2. On considère une charge électrique Q_0, ponctuelle et placée en un point 0. On se place en un point M de l'espace différent du point O.

III.2. a. Faire un schéma.

III.2. b. Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}(M)$ créé en M par Q_0 en coordonnées sphériques.

III.2. c. Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}(M)$ créé en M par Q_0 en coordonnées cylindriques.

III.2. d. Donner l'expression du champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}}(M)$ créé en M par Q_0 en coordonnées cartésiennes.

III.2. e. En utilisant le système de coordonnées de votre choix, en considérant deux points distincts A et B exprimer, en fonction de Q_0 et des cordonnées des points, la quantité

$$V_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{\mathbf{E}}(M).\overrightarrow{\mathrm{dl}}(M)$$

III.2. f. Comment s'appelle cette dernière quantité ?

IV. Interprétation de la divergence

La divergence est un opérateur agissant sur un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{\Psi}}(M)$ défini localement et donnant un nombre scalaire.

IV.1. On considère un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{j}_e}$ défini de la façon suivante en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathbf{j}}_e(M) = j_z(r, \theta, z)\overrightarrow{\mathbf{e}_z} \text{ avec } \begin{cases} j_z(r,\theta,z) & = & J_0 \exp(-(z - z_1)/z_0) \quad \forall\theta, \forall r \leq R_0, \forall z \geq z_1 \\ & = & 0 \text{ partout ailleurs} \end{cases}$$

IV.2. Calculer la divergence du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}_e}(M)$ partout dans l'espace.

IV.3. On considère un cylindre de hauteur H, dont la base est en $z = 0$, de rayon R. Calculer I_v, l'intégrale de la divergence du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}_e}$ sur l'ensemble du volume du cylindre, soit la quantité

$$I_v = \iiint_{\text{cylindre}} \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\mathbf{j}_e}(M)\mathrm{d}^3\tau$$

On rappelle qu'en coordonnées cylindriques : $\mathrm{d}^3\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$. On distinguera les deux cas $R > R_0$ et $R < R_0$.

IV.4. On appelle flux sortant de $\overrightarrow{\mathbf{j}_e}$ la quantité de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}_e}$ qui "sort" de la surface fermant le cylindre. Cette quantité est noté $\Phi_S(\overrightarrow{\mathbf{j}_e})$. Définissant le vecteur élémentaire de surface, $\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathbf{S}_M}$, normal à la surface et orienté vers son extérieur, le flux se définit mathématiquement comme :

$$\Phi_S = \oiint \overrightarrow{\mathbf{j}_e}(M).\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathbf{S}_M}$$

Le symbole O signifiant que l'on intègre sur une surface fermée.

IV.4. a. Faire un schéma en y reportant tous les vecteurs ainsi que la base de projection.

IV.4. b. Calculer Φ_S, en décomposant la surface du cylindre en 3 parties (haut , bas, côté).

IV.4. c. Relier Φ_S à I_v.

IV.4. d. Ce théorème est il généralisable ? Comment s'appelle -t il ?

V. Interprétation du rotationnel

Une interprétation mécanique du rotationnel On considère un disque de masse ponctuelle m, de rayon R_0 en rotation autour de l'axe z ascendant. Un point M, appartenant au disque, a donc pour coordonnées dans le repère cylindro-polaire $O, \overrightarrow{\mathbf{e}_r}, \overrightarrow{\mathbf{e}_\theta}, \overrightarrow{\mathbf{e}_z}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = r\ \overrightarrow{\mathbf{e}_r}$$

Le vecteur vitesse du point M est orthoradial :

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{OM}}} = v_\theta\ \overrightarrow{\mathbf{e}_\theta}$$

Le disque effectue un tour complet autour de O en un temps T_0.

V.1. Faire un schéma, en y notant tous les vecteurs.

V.2. Exprimer v_θ en fonction de r et T_0.

V.3. Exprimer le rotationnel du champ de vitesse en fonction de r et T_0.

V.4. Comment varient les composantes du rotationnel quand le rayon de la trajectoire tend vers 0, vers l'infini ?

V.5. On appelle circulation du vecteur vitesse sur un lacet fermé $\mathcal{L}$ la quantité , notée $C(\overrightarrow{\mathbf{v}})$ définie par :

$$C(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \oint_{\mathcal{L}} \overrightarrow{\mathbf{v}}(M).\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{l}}(M)$$

V.5. a. En prenant pour lacet un cercle de rayon $r < R_0$, faire un schéma avec tous les vecteurs mis en jeu.

V.5. b. Calculer la circulation du champ de vitesse du disque sur ce lacet.

V.5. c. Calculer le flux du rotationnel ϕ_D au travers le disque de rayon $r < R_0$, borné par le lacet choisi à la question précédente. On prendra :

$$\Phi_D = \iint_{disque} \left(\overrightarrow{\nabla}\Lambda\overrightarrow{\mathbf{v}}\right).\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathbf{S}_M}$$

Remarquons, ici, que la surface d'intégration n'est pas fermée, ce qui pose un problème sur le sens d'orientation du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathbf{S}_M}$.

V.5. d. Comment varient ϕ_D et $\overrightarrow{\mathrm{d}^2\mathbf{S}_M}$ pour les valeurs asymptotiques et limites de r ? Relier ces deux grandeurs .

V.5. e. Peut on généraliser ce résultat, comment s'appelle alors le théorème obtenu ?

V.5. f. En déduire une interprétation du rotationnel et donner une signification à la notion de "spin".

VI. Annexes d'aide

VI.1. Définition

Afin de simplifier l'écriture des opérations d'analyse vectorielle, il est souvent commode d'utiliser un petit artifice de calcul que les physiciens nomment fréquemment "le vecteur Nabla". Il s'agit d'écrire les opérations de dérivation de plusieurs variables sous une forme vectorielle, ce qui permet de rapidement écrire des égalités d'analyse vectorielle en évitant de fastidieux calculs. **Il convient cependant d'être particulièrement attentif aux opérations que l'on mène et d'être très soigneux dans les égalités écrites.**
En base de cartésiennes, le vecteur Nabla, noté $\overrightarrow{\nabla}$ est l'opérateur que l'on note vectoriellement :

$$\overrightarrow{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Afin d'alléger les notations, il est souvent commode de supprimer la fraction dans la dérivation partielle et la remplacer par un indice. On écrira ainsi, plus simplement :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x \quad \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y \quad \frac{\partial}{\partial z} = \partial_z$$

Ce vecteur ∇ agit donc comme un opérateur de dérivation, et s'utilise come un vecteur habituel en ce qui concerne les produits scalaires et vectoriels.

VI.2. Opérations sur des vecteurs

On considère un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ de coordonnées cartésiennes A_x, A_y, A_z.

VI.2. a. La divergence

La divergence du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ s'écrit :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathbf{A}}) = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$$

que l'on peut écrire formellement comme un produit scalaire :

$$\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\mathbf{A}}$$

VI.2. b. Le rotationnel

Si l'on fait le produit vectoriel entre le vecteur $\overrightarrow{\nabla}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$, il vient :

$$\overrightarrow{\nabla} \Lambda \overrightarrow{\mathbf{A}} = \left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right. \Lambda \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ -\partial_x A_z + \partial_z A_x \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{array} \right. = rot(\overrightarrow{\mathbf{A}})$$

VI.2. c. La Laplacien

Le poduit scalaire de $\overrightarrow{\nabla}$ par lui même donne un opérateur de dérivation du second ordre :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\nabla} = \left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right. . \left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{array} \right. = \left({\partial_x}^2 + {\partial_y}^2 + {\partial_z}^2 \right)$$

L'application de cet opérateur noté $\overrightarrow{\nabla}^2$ sur un vecteur $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\nabla}^2 \overrightarrow{\mathbf{A}} = \left({\partial_x}^2 + {\partial_y}^2 + {\partial_z}^2 \right) \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \partial_x^2 A_x + \partial_y^2 A_x + \partial_z^2 A_x \\ \partial_x^2 A_y + \partial_y^2 A_y + \partial_z^2 A_y \\ \partial_x^2 A_z + \partial_y^2 A_z + \partial_z^2 A_z \end{array} \right. = \Delta \overrightarrow{\mathbf{A}}$$

L'opérateur $\vec{\vec{\nabla}}^2$ appliqué à un vecteur est donc la laplacien vectoriel.

VI.3. Opérations sur des fonctions scalaires

Considérons ici, une fonction scalaire f dépendant d'un point géométrique M repéré par un jeu de trois coordonnées correspondant au système choisi (cartésien, cylindro-polaire, sphérique,...). **VI.3. a.** Le gradient

Le gradient est un opérateur qui, à une fonction scalaire associe un vecteur tangent à la surface représentative de la fonction. En coordonnées cartésiennes le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f(x,y,z)) = \left| \begin{array}{l} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{array} \right. = \left(\partial_x f\ \overrightarrow{\mathbf{e}_x} + \partial_y f\ \overrightarrow{\mathbf{e}_y} + \partial_z f\ \overrightarrow{\mathbf{e}_z}\right)$$

On peut noter formellement cette opération comme l'application du vecteur $\vec{\vec{\nabla}}$ sur la fonction f. Soit :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \vec{\vec{\nabla}} f$$

La différentielle totale de f s'écrit alors, quel que soit le système de coordonnées :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f).\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{M}}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}\mathbf{M}}$ est le vecteur déplacement élémentaire autour du point M. **VI.3. b.** La laplacien

Le Laplacien, noté Δ, associe à une fonction scalaire f un scalaire, obtenu par déivation double en espace :

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

Soit plus généralement :

$$\Delta f = \vec{\vec{\nabla}}^2 f \text{ noté aussi } \nabla^2 f$$

Explicit Forms of Vector Operations

Let $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ be orthogonal unit vectors associated with the coordinate directions specified in the headings on the left, and A_1, A_2, A_3 be the corresponding components of $\mathbf{A}$. Then

Cartesian $(x_1, x_2, x_3 = x, y, z)$

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$$

Cylindrical (ρ, ϕ, z)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\phi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right) + \mathbf{e}_3 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\phi}\right)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Spherical (r, θ, ϕ)

$$\nabla\psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_1) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial\phi}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial\phi}\right] + \mathbf{e}_2\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right] + \mathbf{e}_3 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\left[\text{Note that } \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)\right]$$

Vector Formulas

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

$$\nabla\times\nabla\psi = 0$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\cdot\mathbf{a}$$

$$\nabla\times(\psi\mathbf{a}) = \nabla\psi\times\mathbf{a} + \psi\nabla\times\mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$$

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

If $\mathbf{x}$ is the coordinate of a point with respect to some origin, with magnitude $r = |\mathbf{x}|$, and $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ is a unit radial vector, then

$$\nabla\cdot\mathbf{x} = 3 \qquad \nabla\times\mathbf{x} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n} = \frac{2}{r} \qquad \nabla\times\mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{n} = \frac{1}{r}[\mathbf{a} - \mathbf{n}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})] \equiv \frac{\mathbf{a}_\perp}{r}$$

FIGURE 1 – Extrait de "Classical Electrodynamics", JD, JACKSON, Wiley et Sons, NYC 1980