Dans ce problème on s'intéresse à la fonte d'un cylindre de glace. On considère un cylindre de glace de hauteur H_0, de rayon R_0. La glace a une masse volumique ρ_g. La capacité calorifique massique de la glace est C_p^g. La capacité calorifique de l'eau liquide est C_p^L. La masse volumique de l'eau liquide est ρ_L. La chaleur latente de fusion de la glace, considérée comme constante, est L_f.

Données numériques :

Pour le cylindre :

$$H_0 = 1 \text{ km}; R_0 = 1 \text{ km}$$

Pour les grandeurs physiques :

$$\begin{array}{llll} \rho_g = 9.10^2 \text{ kg. m}^{-3} & \rho_L = 10^3 \text{ kg. m}^{-3} & C_p^g = 2 \text{ kJ. kg}^{-1}\text{. K}^{-1} & C_p^L = 4,2 \text{ kJ. kg}^{-1}\text{. K}^{-1} \\ L_f = 3.10^2 \text{ kJ. kg}^{-1} & \lambda_L = 0,6 \text{ W. m}^{-1} \text{ K}^{-1} & g = 9,8 \text{ m s}^{-2} & \end{array}$$

I. Etude Energétique

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonte du cylindre à pression et température extérieure constantes.

I.1. *Exprimer la masse M_g du cylindre de glace en fonction de H_0, R_0, ρ_g. Faire l'application numérique.*

I.2. *Fonte de la glace.*

I.2. 1. *Exprimer l'énergie E_f que doit absorber le système composé de la masse M_g pour fondre complètement, à la température de fusion de la glace T_0 en fonction de H_0, R_0, ρ_g et L_f.*

I.2. 2. *Faire l'application numérique.*

I.2. 3. *A quelle variation de fonction d'état correspond l'énergie E_f ? Jusifier votre réponse.*

On considère maintenant que la glace est initialement à la température $T_i < T_0$. Cette glace fond complètement à l'air libre considéré comme réservoir de température fixe à la température T_f et à pression atmosphérique.

I.3. *Variation d'enthalpie*

I.3. 1. *Faire un schéma explicite de la transformation totale que subit la masse de glace en fondant. On pourra décomposer la transformation en trois parties.*

I.3. 2. *En déduire l'expression de la variation d'enthalpie ΔH en fonction de H_0, R_0, ρ_g, C_p^g, C_p^L, L_f, T_i,T_f et T_0.*

I.3. 3. *Quelle est la valeur numérique de T_0 ?*

I.3. 4. *Faire l'application numérique pour $T_i = -20^oC$ et $T_f = 20^oC$*

I.3. 5. *Quelle partie de la transformation met en jeu la plus grande énergie ?*

I.4. *Variation d'entropie*

I.4. 1. *Supposant que la transformation totale se fasse très lentement, donner le signe de la variation d'entropie pour la masse de glace M_g pour toute la transformation,* **sans faire aucun calcul**, *en justifiant qualitativement votre réponse.*

I.4. 2. *Exprimer littéralement la variation d'entropie $\Delta S(M_g)$ pour la totalité de la transformation en fonction des données de l'énoncé.*

I.4. 3. *Faire l'application numérique. Conclure.*

II. Tranfert thermique

On considère dans cette partie que le cylindre est complètement immergé dans l'eau liquide. On s'intéresse à la variation spatiale de température et à la vitesse de fonte du cylindre de glace. Pour cette partie on considérera que le cylindre est de longueur H_0, mais se comporte comme s'il était de logueur infinie (invariance cylindrique). Le bord du cylindre est à température de fonte de la glace T_0. L'eau au contact du bord du cylindre est à la même température. A l'infini del'axe central du cylindre de glace, l'eau est à la température $T_\infty = 280$ K. On rappelle les expressions suivantes pour les opérateurs différentiels gradient et Laplacien, en coordonnées cylindriques pour une fonction scalaire $T(M)$:

$$\overrightarrow{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r}\overrightarrow{\mathbf{e}_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\overrightarrow{\mathbf{e}_\theta} + \frac{\partial T}{\partial z}\overrightarrow{\mathbf{e}_z} \quad \text{et} \quad \nabla^2 T = \Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

II.1. *Faire un schéma en coupe de la configuration géométrique du problème. On portera sur le schéma le système de coordonnées cylindriques choisis, ainsi que les températures données aux limites du cylindre de glace et de l'eau liquide.*

II.2. *Donner les équations de la chaleur en température, dans l'eau liquide et dans le cylindre de glace, sous leur forme* *générale.*

II.3. *Température dans l'eau.*

II.3. 1. *En argumentant* **clairement***, montrer que la température dans l'eau ne dépend que d'une seule coordonnée.*

II.3. 2. *En supposant que dans l'eau le régime temporel soit permanent et stationnaire, donner l'équation différentielle vérifiée par la température.*

II.3. 3. *Résoudre cette équation différentielle, en prenant comme condition aux limites que :1) la température sur le bord du cylindre ($r = R_0$) vaut T_0 et 2) pour $r > 10R_0$, la température est constante et vaut T_∞*

II.3. 4. *Tracer l'allure de la courbe $T(r)$ dans l'eau liquide.*

II.4. *Fonte de la glace et vitesse de fonte*

II.4. 1. *Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique.*

II.4. 2. *Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{j}_Q^L}$, densité de courant de chaleur, dans l'eau, au niveau du bord du cylindre, en fonction de λ_L, T_0, T_f, R_0.*

II.4. 3. *En déduire l'expression de I_Q, le courant de chaleur* **entrant** *dans le cylindre de glace.*

II.4. 4. *On suppose que toute la chaleur véhiculée par le courant I_Q a pour unique effet de faire fondre la glace sur la surface du cylindre. Pendant le laps de temps δt, la masse de glace qui a fondu est δm.*

II.4. 4.a. *Exprimer δm en fonction de δt, L_f, λ_L, T_0, T_f, R_0.*

II.4. 4.b. *En déduire l'expression du temps de fonte t_f, du cylindre.*

II.4. 4.c. *Faire l'application numérique. Commenter la validité du modèle par rapport à vos connaissances.*

II.4. 5. *Un iceberg se détache du pôle Nord au mois d'Avril et se dirige plein Sud. Il se déplace à la vitesse U_0 de 1 km/jour. Combien de kilomètres aura-t-il parcouru avant de fondre à moitié puis complètement ? Pourquoi ne voit-on jamais d'iceberg au niveau des côtes françaises ?*

III. Température de fonte

On considère maintenant que le cylindre est vertical, immergé dans l'eau. On s'intéresse à la température de fonte de la glace en fonction de la profondeur. Le haut du cylindre affleure à la surface de l'eau. On prendra l'axe z vertical montant. On rappelle la relation fondamentale de l'hydrostatique, reliant le gradient de la pression P de l'eau à la masse volumique de l'eau et la constante de gravitation terrestre g :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_L\, g$$

On rappelle la relation de Clapeyron sur un changement de phase Solide(S)⟶Liquide(L) :

$$\left(\frac{dP}{dT}\right) = \frac{L_f}{T\,(u_L - u_S)}$$

avec u_L et u_S les volumes massiques de chaque phase, si L_f est la chaleur latente massique du changement de phase.

III.1. *A l'aide de ces deux relations donner l'expression de la température de fusion de la glace $T(z)$ à une profondeur $z < 0$, en fonction de z, L_f,*
rho_g, ρ_L, g et T_0.

III.2. *Faire l'application numérique pour une profondeur égale à la hauteur du cylindre de glace.*

On suppose maintenant que le cylindre de glace fond par sa surface extérieure. La température de cette surface est donc la température $T(z)$ de fonte à la profondeur z.

III.3. *En reprenant le raisonnement de la question II.4 à une côte z, déterminer l'expression du courant de chaleur $I_Q(z)$,* **entrant** *dans le cylindre de glace.*

III.4. *En déduire alors la masse de glace $\delta m(z)$ qui a fondu pendant un laps de temps δt à la côte z.*

III.5. *Le cylindre fond-il plus vite par le haut ou par le bas ?*

III.6. *En déduire pourquoi les icebergs sont si dangereux pour les bateaux (faire un petit schéma).*

— Fin —